புள்ளியியல்

மேல்நிலை
இரண்டாம் ஆண்டு

தமிழ்நாட்டுப்
பாடநூல் நிறுவனம்

புள்ளியியல்

தொகுதி II

மேல் நிலை — இரண்டாம் ஆண்டு

தமிழ்நாட்டுப்
பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை

முதல் பதிப்பு — 1981

பதிப்பாசிரியர் குழுத் தலைவர் :

ஆசிரியர் & மதிப்புரையாளர் :

திரு. மி. சங்கரநாராயணன், எம். ஏ., பி. எஸ்ஸி.,
புள்ளியியல் இணை இயக்குநர்,
புள்ளியியல் துறை,
சென்னை.

மதிப்புரையாளர்கள் :

திரு. தா.கா. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை, எம்.ஏ., எல்.டி.,
கணிதப் பேராசிரியர் (ஓய்வு),
அழகப்பா தொழில் நுட்பக் கல்லூரி,
சென்னை.

திரு. ஆர். அனுமந்தராவ், எம். ஏ.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
பி. எஸ். ஜி. கலைக் கல்லூரி,
கோவை.

விலை : ரூ. 9 — 00

இந்திய அரசு சலுகை விலையில் வழங்கிய 60 ஜி.எஸ்.எம்.
தாளில் இந்நூல் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

அச்சிட்டோர் :
முத்துக்குமரன் பிரஸ், சென்னை 600 001

பொருளடக்கம்

முதல் தாள்

இரண்டாவது தாள்

இரண்டாம் ஆண்டு

முதல் தாள்

அத்தியாயம் 1

நிகழ்திறன் (Probability)

அ. சாத்தியக் கூறு

நிகழ்திறன் அல்லது சாத்தியக் கூறு அல்லது சந்தர்ப்பக் கூறு, ஊக அளவைக் குறிக்கும் இதைப் பண்பளவிலும் எண்ணிக்கை யளவிலும் கொடுக்கலாம். என்றாலும், புள்ளியியலில் இது எண்ணிக்கை யளவிலேயே பயன்படுத்தப்படும். இந்நிலையில், நிகழ்திறன் பற்றிப் படிக்கும்போது சில சொற்றொடர்களை அறிந்துகொள்வது பயன் தரும்.

சோதனை (Experiment or Trial)

நாணயத்தைச் சுண்டுவதும் அல்லது தாயக்கட்டையை அல்லது பகடையை உருட்டுவதும் ஒரு சோதனை எனப்படும். ஒரு நாணயத்தையோ அல்லது தாயக்கட்டையையோ ஐந்து முறை சுண்டுவதோ அல்லது உருட்டுவதோ ஐந்து சோதனைகள் எனப்படும். இது ஐந்து நாணயங்களையோ, அல்லது ஐந்து தாயக்கட்டைகளையோ சேர்த்து ஒரு முறை சுண்டுவதற்கோ அல்லது உருட்டுவதற்கோ சமமாகும்

நிகழ்ச்சி (Event)

ஒரு நாணயத்திற்குத் தலை, பூ என்ற இருபக்கங்கள் உண்டு. ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது அதன் மறுபக்கம் என்ற இரண்டில் ஏதாவது ஒரு பக்கம் தோன்றலாம். இவ்வாறு தலையோ, அதன் மறுபக்கமோ தோன்றும் சம்பவம் " நிகழ்ச்சி " எனப்படும். தாயக்கட்டையில் 1, 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 என்ற எண்கள் கொண்ட 6 பக்கங்கள் உண்டு. தாயக்கட்டையை உருட்டும்போது, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்று குறிப்பிடப்பட்ட பக்கங்களின் ஏதாவது ஒரு பக்கம், மேல் நோக்கித் தோன்றும். இது நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

முற்றும் நிகழ்ச்சி (Exhaustive event)

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது நேரும் நிகழ்ச்சி தலை அல்லது அதன் மறுபக்கமாக இருக்கும். இந்த இரண்டைத் தவிர வேறு நிகழ்ச்சி நிகழா. பல நிகழ்ச்சிகள் கொண்ட ஒரு குழு அல்லது ஓர் அணி அல்லது ஒரு சேர்க்கை, முடிந்த எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் உள்ளடக்கியதாக இருக்குமாயின் அது 'முற்றும் நிகழ்ச்சி.' (அல்லது) 'முற்று நிகழ்ச்சி' என்றழைக்கப்படும்.

ஒரே மாதிரி சம நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events)

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலையோ அதன் மறுபக்கமோ என்ற இரண்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கமே வரும் என்று திண்ணமாகக் கூற இயலாது. ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கந்தான் தோன்றும் என்று முன்னதாகக் கூறுவதற்கோ அல்லது நம்புவதற்கோ எத்தகைய ஏதுக்களும் இல்லை. எனவே, தலையும், அதன் மறுபக்கமும் தோன்றுவதற்குச் சம வாய்ப்புகள் உண்டு. எனவே இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும், சம வாய்ப்புடைய ஒரே மாதிரியான நிகழ்ச்சிகள் எனலாம்.

பரஸ்பர தனி நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events)

ஒரு நிகழ்ச்சியின் தோற்றம் இன்னொரு நிகழ்ச்சியின் தோற்றத்தைப் பாதிக்குமானால் அல்லது தடுக்குமானால் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் பரஸ்பரம் அல்லது தனிப் பரிமாற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது, தலையோ அல்லது அதன் மறு பக்கமோ தோன்றுமே யல்லாது தலையும் அதன் மறு பக்கமும் ஒரே நேரத்தில் தோன்றமுடியா. எனவே தலையின் தோற்றமும், அதன் மறு பக்கத் தோற்றமும் பரஸ்பர தனி நிகழ்ச்சி எனப்படும். இதை வேறுவிதமாகச் 'சார்பு நிகழ்ச்சிகள்' என்றும் கூறலாம்.

சார்பில்லா நிகழ்ச்சிகள் (Independent events)

ஒரு சோதனையில் தோன்றும் ஒரு நிகழ்ச்சி அடுத்த அல்லது அதைத் தொடர்ந்த சோதனைகளின் நிகழ்ச்சியை எந்த விதத்திலும் பாதிக்காதிருந்தால் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லா 'சார்பில்லா நிகழ்ச்சிகள்' என்றழைக்கப்படும்.

கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் (Compound events)

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நிகழுமானால் அது 'கூட்டு நிகழ்ச்சி' எனப்படும். இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டும்போது (இரண்டு தலைகளோ) அல்லது (அதன் இரு மறு பக்கங்களோ) அல்லது (ஒரு பூ, ஒரு தலை) என்ற நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று தோன்றலாம்.

நிகழ்திறனின் விளக்கம் (Definition of probability)

இரு வகையான நிகழ்திறன் உண்டு. ஒன்று கணித நிகழ் திறன் (Mathematical probability) அல்லது முன்னோடி ஊக அளவு (Apriori probability), மற்றொன்று புள்ளியியல் ஊக அளவு (Statistical probability) அல்லது அனுபவ ஊக அளவு (அல்லது) பின்னோடி ஊக அளவு எனப்படும்.

கணித நிகழ் திறன் (Mathematical Probability)

கணித நிகழ் திறன் என்பது ஒரு சோதனை நடப்பதற்கு முன்பே அதன் நிகழ் திறன் பற்றிக் கூறுதல். அது கீழ்வரும் உறுதிப்பாட்டில் அமைந்ததாகும்.

(அ) ஒன்றுக்கொன்று பரஸ்பரத் தொடர்பில்லாத தனி நிகழ்ச்சிகளில் ஒரு நிகழ்ச்சி தோன்றுவதற்கான நம்பிக்கை.

(ஆ) பல்வேறு நிகழ்ச்சிகள் தோன்றுவதற்குரிய சந்தர்ப்பங்கள் சமநிலையில் உள்ளன. எனவே கணித நிகழ் திறன் என்பது ஒரு நிகழ்ச்சி தோன்றுவதற்குரிய வாய்ப்புகளின் அளவுகளை மொத்த வாய்ப்புகளின் அளவுகளால் வகுத்துக் கிடைக்கும் விகித அளவாகும்.

$$\text{நிகழ் திறன்} = \frac{\text{நிகழ்ச்சிக்குரிய சாதக வாய்ப்புகள்}}{\text{சோதனையிலுள்ள மொத்த வாய்ப்புகள்}}$$

நாணயத்தைச் சுண்டுதல்

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது, தலை அல்லது அதன் மறுபக்கம் என்ற இரண்டில் ஏதாவது ஒன்று தோன்றலாம். இவ்விரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் பரஸ்பரம் தம்மில் ஒன்றுக் கொன்று தொடர்பில்லாச் சம வாய்ப்புக் கொண்ட நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். எனவே, தலை தோன்றுவதற்குரிய நிகழ் திறன் $= \frac{1}{2}$.

இரண்டு நாணயங்களைச் சுண்டும்போது இரு தலைகள் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ் திறனைக் காண்போம். ஒவ்வொரு நாணயத்திலும் 'H' (Head) என்று குறிப்பிடப்படக்கூடிய தலைப் பாகமும், 'T' (Tail) என்று குறிப்பிடப்படக்கூடிய அதன் மறுபக்கமும் உண்டு.

ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டும்போது H அல்லது T தோன்றலாம். எனவே இரு நாணயங்களைச் சுண்டும்போது கீழே கொடுத்துள்ள நான்கு நிகழ்ச்சிகள் தோன்றலாம்:

(1)	(2)	(3)	(4)
H,H	H,T	T,T	T,H

இந் நான்கு நிகழ்ச்சிகளில் ஒரே ஒரு நிகழ்ச்சியிலேயே இரு HH தோன்றியுள்ளன. எனவே இதில் வெற்றிக்குரிய நிகழ் திறன் $\frac{1}{4}$.

மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டும்போது, இரு தலைகளும் ஒரு மறு பக்கமும் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ் திறன், கீழ்க் கண்டவாறு 3/8 என அமையும். இங்கு தலையும், அதன் மறுபக்கமும் 8 வகைகளில் தோன்றலாம்.

HHH		
HHT	HTH	THH
TTT		
TTH	THT	HTT

இங்கு இரண்டு அல்லது மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டும் சோதனை என்பது இரண்டு அல்லது மூன்று நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுவதற்கு ஒப்பாகும். அல்லது ஒரே நாணயத்தையே முறையே இரண்டு அல்லது மூன்று தடவைகள் சுண்டுவதற்கும் ஒப்பாகும்.

பகடை உருட்டுதல்

பகடை என்பது பக்கங்களை 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்று குறிப்பிடும் வண்ணம் அமைந்த ஓர் அறுபக்கக் கட்டையாகும். ஒரு பகடைக் காயை உருட்டும்போது '4' என்று குறிப்பிடப்பட்ட அல்லது நான்காவது பக்கம் தோன்றுவதற்குரிய வாய்ப்பைக் கண்டுபிடிப்போம்:

(1) பகடைக் காயின் மொத்தப் பக்கங்கள் = 6.
(2) 4 என்று குறிப்பிடப்பட்ட பக்கம் = 1.

∴ 4வது பக்கம் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ் திறன் = 1/6

இரு பகடைகளை உருட்டும்போது, தோன்றும் பக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 10 ஆக வருவதற்கான நிகழ் திறன் என்ன?

பகடைக்காய் ஆறு பக்கங்களைக்கொண்டது. ஒவ்வொரு பக்கங்களில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்ணிக்கையும் எழுதப்பட்டிருக்கும். ஒரு காயைச் சுழற்றினால் ஏதாவது ஒரு பக்கம் தோன்றும். இதேபோன்று இரண்டாவது பகடைக் காயிலும் ஆறு பக்கங்களில் ஏதாவது ஒரு பக்கம் தோன்றும். ஆனால் முதல் பகடைக்காயில் ஏதாவது ஒரு பக்கம் தோன்றும் அதே நேரத்தில் இரண்டாவது பகடைக்காயிலும் பக்கங்கள் ஆறு வகைகளில் தோன்றலாம். ஆனால், முதல் பகடையின் பக்கங்களோ ஆறு வகையில் தோன்றும். எனவே. இரு பகடைக் காய்களில் பக்கங்கள் ஒரே நேரத்தில் தோன்றும் மொத்த வாய்ப்புகள் $= 6 \times 6 = 36$.

காயின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையின் கூட்டுத்தொகை 10 என வருவதற்குரிய வாய்ப்புகள் $= 3$.

பக்கங்களின் எண்ணிக்கை

முதற் பகடை	இரண்டாவது பகடை	மொத்தம்
4	6	10
5	5	10
6	4	10

எனவே 10 தோன்றுவதற்குரிய நிகழ் திறன் $\frac{3}{36}$ அல்லது $\frac{1}{21}$.

மூன்று பகடைக் காய்களைக்கொண்டு உருட்டும்போது 13 என்ற எண் தோன்றுவதற்குரிய வாய்ப்பு என்ன?

ஒரு பகடையின் பக்கங்கள் சுயமாக ஆறு வகைகளில் தோன்றலாம். ஆனால், இரு பகடைகளின் பக்கங்கள் ஒரே நேரத்தில் பல வகையாகத் தோன்றுவதற்குரிய வாய்ப்புகள் $= 6 \times 6 = 36$.

இதேபோன்று மூன்று பகடைக் காய்களின் பக்கங்கள் ஒரே நேரத்தில் தோன்றுவதற்குரிய வாய்ப்புகள் $= 216$ (36×6)

பக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை (13) என வருமளவில் கீழ்க் கண்டவாறு தோன்றலாம்.

4, 4, 5	3, 4, 6	2, 5, 6	6, 6, 1	5,5,3
4, 5, 4	3, 6, 4	2, 6, 5	6, 1, 6	5,3,5
5, 4, 4	6, 4, 3	5, 2, 6	1, 6, 6	3,5,5
	6, 3, 4	5, 6, 2		
	4, 3, 6	6, 2, 5		
	4, 6, 3	6, 5, 2		

நிகழ் திறன் $= \frac{21}{216} = \frac{7}{72}$

கணித நிகழ் திறனை நாணயம் சுண்டுதல், பகடை உருட்டுதல் போன்ற விளையாட்டுகளில் பயன்படுத்தலாம். இங்கு, சோதனை செய்யாமலேயே சம வாய்ப்புகள் உடைய காரணங்களைக் கணிக்கலாம். ஆனால் நமது வாழ்க்கையில் எத்தகைய நிகழ்ச்சிக்கும் உரிய வாய்ப்புகள் சமமாக இரா. எனவே, இத்தகைய இடங்களில் கணித வாய்ப்புகள் பயன் படுவதில்லை. சம்பவங்கள் நிகழ்வதற்குரிய வாய்ப்புகளின் சரியான எண்ணிக்கையையும் வாய்ப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையையும் நம்மால் சரியாகக் கூற இயலாது. எனவே, சம்பவங்களின் பழமையின் அடிப்படையிலேயே உறுதி செய்யவேண்டியுள்ளது.

புள்ளியியல் நிகழ் திறன் (Statistical probability)

பல நீண்ட சோதனைகளின், அனுபவத்தின் அடிப்படையில் கணிக்கப்படும் நிகழ் திறன் 'புள்ளியியல் நிகழ் திறன்' எனப்படும். ஒரு சோதனையை அதே சூழ்நிலையில் மீண்டும் மீண்டும் அநேக தடவை ('n' தடவைகள்) நடத்துவதாக வைத்துக் கொள்வோம். இதில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி எத்தனை முறை தோன்றுகிறது என்பதைக் கவனித்துக்கொள்வோம். இது 'm' ஆக இருக்கட்டும். எனவே, $\frac{m}{n}$ என்ற விகிதம் இங்கு புள்ளி யியல் ஊக அளவு அல்லது புள்ளியியல் நிகழ் திறனாகக் கருதப் படும்.

முன்பின் முரணில்லாத ஒரே சூழ்நிலையில், ஒன்றுக்கொன்று பரஸ்பரம் தொடர்பில்லாத சமமான மொத்த 'n' வாய்ப்புகளில் 'm' என்ற வாய்ப்புகள் 'E' என்ற ஒரு சம்பவம் நிகழ்வதற்குச் சாதகமாக இருக்குமானால் 'E' என்ற சம்பவம் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ் திறன் $\frac{m}{n}$ என்று விளக்கப்படும்.

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

கணித நிகழ்திறனுக்கும் புள்ளியியல் நிகழ் திறனுக்கும் உள்ள வேறுபாடு

1. கணித நிகழ்திறன் சோதனை நடத்தாமலேயே கணிக்கப்படுகிறது. ஆனால், புள்ளியியல் நிகழ்திறன் சோதனைகள் செய்து அதிலிருந்து கிடைத்த முடிவு களின் அடிப்படையில் கணிக்கப்படுகிறது.

2. கணித நிகழ் திறன் சரியான அளவுகளில் சரியான முறையில் கொடுக்கப்படும். புள்ளியியல் நிகழ்திறன் ஒரு மதிப்பீடே ஆகும். எனவே இது ஓர் உத்தேச அளவாகும்.

நிகழ் திறன் அளவுகளை வரையறுத்தல்

ஒரு சம்பவத்தின் நிகழ் திறன் 'p' என்று குறிப்பிடப்படும். எனவே, அதன் நிகழாத் திறன் அல்லது நிகழ் திறனின்மை (Failure of the event) 'q' என்று குறிப்பிடப்பட வேண்டும். எனவே,

$$p + q = 1$$
$$p = 1 - q$$
$$q = 1 - p$$

நிகழ் திறன் மதிப்பு '0' விலிருந்து 1 என்ற எல்லைக்குள் இருக்கும் நிகழ் திறனின் மதிப்பு '1' என இருக்குமாயின் அது அச் சம்பவத்தின் உறுதியான நிகழ்ச்சியைக் குறிப்பதாகும். வேறு விதமாகக் கூறினால் அந் நிகழ்ச்சி கண்டிப்பாக நடை பெறும். இதுபோன்று ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ் திறன் '0' என்றிருந்தால் அச் சம்பவம் உறுதியாக நிகழாதிருப்பதற்கு உரிய ஓர் அளவைக் குறிக்கும். சம்பவம் நிகழ்வதை 'வெற்றி' என்று குறிப்பிட்டால் 'நிகழாமையைத்' தோல்வி எனக் குறிப்பிட லாம்.

நிகழ் திறன் கணிப்பு

நடைமுறையில், புள்ளியியல் நிகழ்திறன் விளக்கம் பெரிதும் பயன்பட்டபோதிலும் நமது கணிப்புகளில் கணித நிகழ்திறன் அளவுகளையே பெரிதும் கையாள்கிறோம்

கூட்டு (குழுக்கள்) (Combination)

மேலும் விரிவாகப் படிப்பதற்கு முன்னால் குழுக்கள் அமைப்பது குறித்துப் படிப்போம். ஐந்து விளையாட்டு

வீரர்கள் கொண்ட ஓர் அணியிலிருந்து மூன்று பேர் கொண்ட ஒரு குழு அமைப்பதாகக் கொள்வோம். இதனைப் பத்து விதங்களில் அமைக்கலாம். விடையைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறியீடுகளில் எழுதலாம் :

$_5C_3$ என்பது ஐந்து நபர்கள் கொண்ட அணியிலிருந்து 3 பேர் கொண்ட குழுக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

அல்லது $_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ (அ-து) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2}$

அல்லது $_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$ (அ-து) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4}$

அல்லது $_8C_2 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$ (அ-து) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$

$_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210$

அல்லது $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$

$$_nC_r = \frac{n \times (n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1) \times (n-r) \ldots \times 1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots \times r \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-r)}$$

மேற்கூறிய கொள்கையை நாம் பின்வரும் கணக்குகளில் பயன்படுத்தலாம் :

எடுத்துக்காட்டு

(1) 5 வெள்ளைப் பந்துகளும், 7 சிவப்புப் பந்துகளும் கொண்ட ஒரு கூடையிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுக்கும்போது, எடுக்கப்படும் அப் பந்து வெள்ளை நிறப் பந்தாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்திறன் என்ன?

மொத்தம் 5 வெள்ளைப் பந்துகள் இருப்பதால் வெள்ளை நிறப் பந்துகளை 5 விதங்களில் எடுக்கலாம். எனவே இந் நிகழ்ச்சி 5 விதமாக நடைபெறும். மொத்தம் 12 பந்துகள் கூடையில் இருப்பதால் ஒரு பந்தை ஏதாவது ஒரு பந்து என்ற முறையில் $_{12}C_1$ அல்லது 12 வழிகளில் எடுக்கலாம். எனவே, ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்தை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்திறன்

$$= \frac{\text{சம்பவம் நிகழ்வதற்குரிய வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த வாய்ப்புக்களின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{5}{12}.$$

(2) விளையாட்டுச் சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஓர் 'இராஜா' சீட்டை எடுப்பதற்கான நிகழ்திறன் என்ன ?

மொத்தச் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 52$

மொத்த 'இராஜா' சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கை $= 4$

52 சீட்டுகளில் ஒரு சீட்டாலான குழுக்களின் எண்ணிக்கை $= {}_{52}C_1$
$= 52$

நிகழ்ச்சிக்குரிய வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $= {}_4C_1$
$= 4$

எனவே நிகழ்திறன் $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$

(3) 52 சீட்டுகள் கொண்ட கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இரு சீட்டுகளும் இராணியாக இருப்பதற்குரிய நிகழ் திறன் என்ன ?

52 சீட்டுகளிலிருந்து இரு சீட்டுகளாலான

மொத்தக் குழுக்கள் $= {}_{52}C_2$

$$= \frac{52 \times 51}{1 \times 2} = 26 \times 51$$

இராணி சீட்டுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 4$

இரு இராணி சீட்டுகள் கிடைப்பதற்குரிய வழிகள் $= {}_4C_2$

$$= \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

இரு இராணி சீட்டுகள் கிடைப்பதற்குரிய

$$\text{நிகழ்திறன்} = \frac{6}{26 \times 51} = \frac{2}{26 \times 17}$$

$$= \frac{1}{221}$$

நிகழ்திறனின் கூட்டு விதித் தேற்றம் (Additional theorem of probability)

மொத்தம் 'n' வாய்ப்புகள் கொண்ட ஒரு சோதனையில் m_1 வாய்ப்புகள் E_1 என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாகவும் m_2 வாய்ப்புகள் E_2 என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாகவும் இருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம்.

E_1 நிகழ்ச்சியின் நிகழ்திறன் $= P(E_1) = \frac{m_1}{n}$

E_2 நிகழ்ச்சியின் நிகழ்திறன் $= P(E_2) = \frac{m_2}{n}$

E_1 மற்றும் E_2 நிகழ்ச்சியின் நிகழ்திறன் $= p(E_1 + E_2)$
$= p(E_1) + P(E_2)$

பொதுவிதி $P(E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots\ldots$

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு கூடையில் 3 சிவப்புப் பந்துகளும், 4 பச்சைப் பந்துகளும், 5 மஞ்சள் பந்துகளும் உள்ளன.

கூடையில் உள்ள மொத்தப் பந்துகள் = 12.

ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்திறன் $= \frac{3}{12} = P(E_1)$

ஒரு பச்சைப் பந்தை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்திறன் $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
$= P(E_2)$

ஒரு மஞ்சள் பந்தை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்திறன் $= \frac{5}{12}$
$= P(E_3)$

(1) ஒரு, சிவப்பு அல்லது பச்சை நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கான வாய்ப்பு

$$P(E_1 + E_2) \ \frac{7}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = P(E_1) + P(E_2)$$

(2) ஒரு, சிவப்பு அல்லது மஞ்சள் நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கான வாய்ப்பு $= \frac{8}{12}$ —

$$P(E_1 + E_3) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = P(E_1) + P(E_3)$$

(3) ஒரு, பச்சை அல்லது மஞ்சள் நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கான வாய்ப்பு $= \frac{9}{12}$

$$P(E_2 + E_3) = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = P(E_2) + P(E_3)$$

(4) ஒரு, சிவப்பு அல்லது பச்சை அல்லது மஞ்சள் நிறப் பந்தை எடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பு $= \frac{12}{12}$

$$P(E_1 + E_2 + E_3) = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12}$$

$$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

இங்கு சிவப்பு, பச்சை மற்றும் மஞ்சள் நிறப் பந்துகள் தோன்றுவது ஒன்றுக்கொன்று பரஸ்பரம் தொடர்பில்லாதது என்பதைக் குறித்துக்கொள்ளவேண்டும். ஏனெனில், நாம் எடுத்த பந்து சிவப்பு நிறமாக இருந்தால் அது, பிறகு பச்சை நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கு எவ்விதத்திலும் தடையாக இருப்பது இல்லை.

இனி, பரஸ்பரம் தொடர்புடைய நிகழ்ச்சிகளைப் பார்ப்போம். 5 சிவப்பும் 5 கருப்பு நிறம் கொண்ட 10 சீட்டுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இவ்விரு வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும் இரண்டு சீட்டுகள் படங்களால் ஆனதும் மீதி 3 சீட்டுகள் எண்ணிக்கையால் ஆனதும் ஆகும். இதைக் கீழ்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கலாம்:

நிறம்	படம்	எண்ணிக்கை	மொத்தம்
சிவப்பு ...	2	3	5
கருப்பு ...	2	3	5
	4	6	10

ஒரு சிவப்பு நிறச் சீட்டை எடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= \frac{5}{10} = P(E_1)$$

ஒரு படச் சீட்டை எடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பு $= \frac{4}{10} = P(E_2)$

ஒரு சிவப்பு நிறப் படச் சீட்டை எடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= \frac{2}{10} = P(E_1 E_2)$$

எனவே ஒரு சிவப்பு அல்லது படமோ உள்ள சீட்டு கிடைப் பதற்குரிய வாய்ப்பு $= \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10}$

இரண்டு சிவப்புப் படச் சீட்டுகளும் இரு இடங்களிலும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளதால் $\left(\frac{5}{10} \ \& \ \frac{4}{10}\right)$ இதை ஒரு முறை கழிக்க வேண்டியுள்ளது.

$$\frac{7}{10} = \frac{5+4-2}{10}$$

எனவே

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$$

(1) இரண்டு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்திறன் கூட்டுத் தொகை 1க்குச் சமமானால் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றுக் கொன்று முழுமை செய்யும் இணை (Complementary) என்று கூறலாம்.

(2) இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று பரஸ்பரம் பாதிக்கப்படாமலிருந்தால் $P(E_1+E_2) = P(E_1)+P(E_2)$ என்று அமையும்.

(3) இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று சார்புடையதாக இருந்தால்
$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$

நிகழ்திறனின் பெருக்கல் தேற்றம் (Multiplication theorem of probability)

ஒன்றையொன்று தோன்றுவதை எவ்விதத்திலும் பாதிக்காத இரு நிகழ்ச்சிகள் சுய நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

E_1 மற்றும் E_2 என்ற இரு சுய நிகழ்ச்சிகள் கொடுக்கப்பட்டால் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே நேரத்தில் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ்திறன் அந்நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்திறன்களின் பெருக்குப் பலனுக்குச் சமமாகும்.

நிகழ்ச்சி	நிகழ்திறன்
E_1	$P(E_1)$
E_2	$P(E_2)$
E_3	$P(E_3)$

$$P(E_1\ E_2\ E_3) = P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3)$$

எடுத்துக்காட்டு

மூன்று நாணயங்களைச் சேர்த்து ஒரு முறைச் சுண்டும்போது அல்லது ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறைகள் சுண்டும்போது மூன்று தலைகள் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ்திறன் காணவும்.

இங்கு இந்நிகழ்ச்சிகள் யாவும் சுயமானவை; ஏனெனில் ஒரு சோதனையில் தோன்றும் தலையோ, அதன் அடுத்த பக்கமோ அடுத்த சோதனையில் தோன்றும் நிகழ்ச்சியை எவ்விதத்திலும் பாதிப்பதில்லை. ஒரு நாணயத்தில் தலை தோன்றுவதற்குரிய நிகழ்திறன் $\frac{1}{2}$.

ஒரே நேரத்தில் இரு தலைகள் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ்திறன் $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ஒரே நேரத்தில் மூன்று தலைகள் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ்திறன் $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

நிபந்தனை நிகழ்திறன் (Conditional probability)

E_1 மற்றும் E_2 என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்திறன், E_1 நிகழ்திறனை, E_1 நிகழ்திறனின் அடிப்படையில் E_2வின் நிபந்தனை நிகழ்திறன் கொண்டு பெருக்கினால் ஏற்படும் பெருக்குப் பலனுக்குச் சமம்.

A, B, C என்ற மூன்று கூடைகள் வெண்ணிறப் பந்துகளையும் செந்நிறப் பந்துகளையும் கீழ்க்கண்டவாறு கொண்டுள்ளன:

கூடைகள்	வெண்மை	சிவப்பு	மொத்தம்
A	1	1	2
B	2	—	2
C	—	2	2
மொத்தம்	3	3	6

ஏதாவது ஒரு கூடை தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து ஒரு பந்து எதேச்சையாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும். அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் பந்து வெண்மையாக இருப்பதற்கான நிகழ்திறன் என்ன ?

வெள்ளைப் பந்து வேண்டுமெனில், A அல்லது B என்ற இரு கூடைகளைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும்.

A என்ற கூடையைக் கவனிப்போம்;

A கூடையின் நிகழ்திறன் $= \frac{1}{3} = P(A)$

A யிலிருந்து ஒரு வெண்மையான பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்திறன் $= \frac{P(W)}{P(A)} = \frac{1}{2}$

எனவே A கூடையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்திறன் $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(AW)$

இதுபோன்று B கூடையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்திறன் $= 1/3 \times 2/2 = 1/3$

எனவே வெண்மை நிறப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்திறன் $= 1/6 + 1/3 = 1/2$

கூட்டு மற்றும் பெருக்கல் நிகழ்திறன்கள் (Addition and Multiplication of probabilities)

இரண்டு பகடைகளை எடுத்துக்கொள்வோம். அவைகளை ஒரே நேரத்தில் உருட்டும்போது தோன்றும் பக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 6 ஆக அமைவதற்கான சாத்தியக் கூறு என்ன ?

இரு பகடைகளை A, B என்று குறிப்பிடுவோம்.

பகடைகளின் பக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 6 கீழ்க் கண்டவாறு அமையலாம்.

பகடை	பக்கங்களின் மேலுள்ள எண்ணிக்கை				
A	1	2	3	4	5
B	5	4	3	2	1
	6	6	6	6	6

முதல் பகடையில் 1 என்ற எண் வருவதற்கு உள்ள நிகழ் திறன் 1/6. இதுபோல் இரண்டாவது பகடையில் 5 என்ற எண் வருவதற்கான நிகழ்திறன் 1/6.

எனவே ஒரே நேரத்தில் முதற்காயில் 1ம் இரண்டாவது காயில் 5ம் வருவதற்குரிய சாத்தியக்கூறு = 1/6×1/6 = 1/36. இதுபோன்று, மற்ற ஐந்து விதமான அமைப்புகளுக்கும் உரிய நிகழ்திறன் கீழ்க்கண்டவாறு 1/36 ஆகும்.

A	B	
1	5	$1/6 \times 1/6 = 1/36$
2	4	$1/6 \times 1/6 = 1/36$
3	3	$1/6 \times 1/6 = 1/36$
4	2	$1/6 \times 1/6 = 1/36$
5	1	$1/6 \times 1/6 = 1/36$

எனவே, இரு பகடைகளை உருட்டுவதால் கூட்டுத்தொகை 6 என்ற மொத்தம் கிடைப்பதற்குரிய சாத்தியக் கூறு

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

எடுத்துக்காட்டு

இரு பகடைகளை உருட்டும்போது தோன்றும் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையின் கூட்டுத்தொகை குறைந்தது 6-ம் அதற்கு மேலும் அமைவதற்குரிய நிகழ்திறன் என்ன ?

பக்கங்களின் கூட்டு எண்ணிக்கை = 6, 7, 8, 9, 10. 11, 12 என இருக்கலாம்.

1. கூட்டுத்தொகை 6 என வருவதற்கான நிகழ்திறன்

A	1	2	3	4	5
B	5	4	3	2	1
	6	6	6	6	6

$= 5 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

2. கூட்டுத்தொகை 7 என வருவதற்குரிய நிகழ்திறன்

A	1	2	3	4	5	6
B	6	5	4	3	2	1
	7	7	7	7	7	7

$= 6 \times \frac{1}{36} = \frac{6}{36}$

3. கூட்டுத்தொகை 8 என வருவதற்குரிய நிகழ்திறன்

A	2	3	4	5	6
B	6	5	4	3	2
	8	8	8	8	8

$= 5 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

4. கூட்டுத்தொகை 9 என வருவதற்குரிய நிகழ்திறன்

A	3	4	5	6
B	6	5	4	3
	9	9	9	9

$= 4 \times \frac{1}{36} = \frac{4}{36}$

5. கூட்டுத்தொகை 10 என வருவதற்குரிய நிகழ்திறன்

A	4	5	6
B	6	5	4
	10	10	10

$= 3 \times \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$

6. கூட்டுத்தொகை 11 என வருவதற்குரிய நிகழ்திறன்

A	5	6
B	6	5
	11	11

$= 2 \times \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$

7. கூட்டுத்தொகை 12 என வருவதற்குரிய நிகழ்திறன்

A 6
B 6

12 $= 1 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{36}$

8. குறைந்தது 6 அல்லது அதற்கு மேலேயுள்ள மதிப்புக் கூட்டுத் தொகையாக வருவதற்குரிய நிகழ்திறன்

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

ஈருறுப்பு விரிவும் ஈருறுப்புப் பரவலும் (Binomial expansion & Binomial distribution)

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்கள் அலைவெண் பரவல்களில் கொடுக்கப்படும். பரவல்கள் உண்மை விவரங்களின் அடிப்படையில் அமைந்திருக்கும். ஆனால் சில பரவல்கள் உண்மையான விவரங்களின் அடிப்படையிலோ அல்லது சோதனை அடிப்படையிலோ அமையாதிருக்கலாம். அவைகள் சில கோட்பாடுகள்மீது கணித வழியாகவோ அல்லது தேற்றங்களின் மூலமாகவோ கிடைக்கப்பட்ட பரவல்களாக இருக்கலாம். இப்பரவல்கள் 'கோட்பாட்டுப் பரவல்கள்' (Theoretical distribution) எனப்படும். இப் பரவல்களில் உள்ள அலைவெண்கள் உண்மையானவையாக இல்லாது, கணித விதியின் படியோ அல்லது கோட்பாடுகளின்படியோ எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களாக இருப்பதால் இப் பரவல்களும் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களின் பரவல்கள் எனப்படும். மேலும், ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial Distribution), மரபுப் பரவல் அல்லது இயற் பரவல் (Normal Distribution) என்றும், பாய்சான் பரவல் (Poisson Distrbuition) என்றும் மூவகைப்படும்.

ஈருறுப்புப் பரவல்

இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுவதால் தோன்றும் நிகழ்ச்சிகளைக் காண்போம் :

நாணயம் A : H H T T
நாணயம் B : H T H T

இங்கு 'H' என்பது தலையையும் 'T' அதன் மறுபக்கத்தையும் குறிக்கும். இதைக் கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம்:

ஒரு நாணயத்தில் தலையோ, அதன் மறுபக்கமோ தோன்றுவதற்குரிய வாய்ப்பு $= \frac{1}{2}$. எனவே, மேற்கூறிய நிகழ்ச்சிகளுக்குரிய நிகழ்திறன் கீழ்வருமாறு:

நிகழ்ச்சி	நிகழ்திறன்
HH	$1/2 \times 1/2 = 1/4$
HT	$1/2 \times 1/2 = 1/4$
TH	$1/2 \times 1/2 = 1/4$
TT	$1/2 \times 1/2 = 1/4$

இதில் இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு 1/4. குறைந்தது ஒரு தலையோ அல்லது அதன் ஒரு மறுபக்கமோ கிடைப்பதற்குரிய வாய்ப்பு $2 \times 1/4 = 1/2$.

அதன் இரு மறுபக்கங்களும் ஒரே நேரத்தில் தோன்றுவதற்குரிய வாய்ப்பு 1/4.

தலை தோன்றுவதை 'வெற்றி'யாகவும் அதற்கான நிகழ்திறன் அளவை 'p' என்றும் குறிப்பிடுவோம். ஆகையால் அதன் மறுபக்கம் தோன்றுவதைத் 'தோல்வி'யாகவும் அதற்குரிய நிகழ்திறனை 'q' என்றும் குறிப்பிடுவோம். எனவே, $p+q=1$ அல்லது $q=1-p$.

தலையும், அதன் மறுபக்கமும் தோன்றுவதை அவைகளுக்குரிய நிகழ்திறன் அளவுகளால் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம் :

HH	HT	TH	TT
$= pp$	pq	qp	qq
$= p^2$	pq	qp	q^2
$= p^2$	pq	qp	q^2
$= p^2$	$(pq + pq)$		q^2
$= p^2$	$2pq$		q^2

$(p^2+2pq+q^2)$ என்பது $(p+q)^2$ என்பதன் விரிவாக்கம் ஆகும். இதிலிருந்து, நாம் அறிவது என்னவெனில், இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் சுயமாக இயங்குவன என்றால் அவைகளின் கூட்டு நிகழ்திறனை $(p+q)^2$ என்பதன் விரிவாக்கமாகக் கொள்ளலாம்.

இதில் $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ என வைத்துக்கொண்டால் பல்வகை நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்திறனைக் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

2 தலைகள் $p^2 = 1/2 \times 1/2 = 1/4$

1 தலை $= 2pq = 2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/2$

2 மறுபக்கங்கள் $= q^2 = 1/2 \times 1/2 = 1/4$

$$(1/2 + 1/2)^2 = (1/2)^2 + 2 \times 1/2 \times 1/2 + (1/2)^2$$

இதன் பலனைக் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்:

$$(1/2 + 1/2)^2 = (q + P)^2$$

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ் திறன்
0	$1/2 \times 1/2 = 1/4$
1	$2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/2$
2	$1/2 \times 1/2 = 1/4$

மூன்று நாணயங்களையும், நிகழ்ச்சிகளின் தோற்றங்களைக் குறித்தும் கவனிப்போம்.

HHH	$= p \times p \times p = p^3$	p^3
HHT	$= p \times p \times q = p^2q$	
HTH	$= p \times q \times p = p^2q$	$3p^2q$
THH	$= q \times p \times p = p^2q$	
THT	$= q \times p \times q = pq^2$	
TTH	$= q \times q \times p = pq^2$	$3p^2q$
HTT	$= p \times q \times q = pq^2$	
TTT	$= q \times q \times q = q^3$	q^3

இங்கு $p^3 + 3\,{}^2pq + 3\,p^2q + q^3$ என்பவை $(p+q)^3$ என்பதின் விரிவாக்கமாகும், இங்கு p, q என்ற அளவுகளின் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால் வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்திறன் காணலாம்.

இதிலிருந்து பொதுவாக $(p + q)^n$ அல்லது பெரும்பான்மை $(q + p)^n$ என்ற அமைப்பைப் பயன்படுத்தலாம். இங்கு 'n' என்பது நாணயங்களின் எண்ணிக்கையையோ அல்லது ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் முறைகளின் எண்ணிக்கையையோ குறிப்பதாகும்.

கூட்டு நிகழ்ச்சிகளில் நிகழ்திறன்

மேலே கூறிய விவரங்களைக் கீழ்வருமாறும் விளக்கலாம்: ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்குரிய நிகழ்திறன் 'p' எனவும், தோல்விக்குரிய நிகழ்திறன் 'q' எனவும் இருந்தால் ($q = 1 - P$). 'n' நாணயங்களில் 'r' நாணயங்களில் வெற்றி கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்திறன் கீழ்க் கண்டவாறு இருக்கும்.

$${}_nC_r\ p^n\ q^{n-r}; \quad q = 1-p$$

$${}_nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \times \lfloor (n-r)} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times n}{(1 \times 2 \times 3 \ldots \times r)(1 \times 2 \ldots (n-r))}$$

ஒரு நிகழ்ச்சி 'r' முறை தோன்றுகிறதென்றால் $(n-r)$ தடவைகள் தோன்றவில்லை என்றாகும். எனவே, நிகழ்திறன் பெருக்கல் விதிப்படி 'r' முறை வெற்றியும், அதே நேரத்தில் $(n-r)$ முறை தோல்வியும் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ்திறன் $p^r q^{n-r}$.

இதை மேலும் விளக்கினால் எந்தச் சோதனையிலிருந்து ஆரம்பித்து எந்தச் சோதனை வரைக்கும் 'r' முறை என்று சொல்லமுடியாது. வேறு விதமாகக் கூறினால் 'r' எண்கள் கொண்ட குழுவை 'n' எண்கள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து அமைப்பதற்கு இது ஒப்பாகும். இதனை அடையாளக் குறியீட்டு முறையில் எழுதினால் ${}_nC_r$ என்று எழுதலாம். பெருக்கல் விதிப்படி 'r' முறை வெற்றிக்கும், $(n-r)$ முறை தோல்விக்குமுரிய நிகழ்திறன் $(p^y \times q^{n-r})$ என்று கண்டோம். ஆனால் இங்கு ${}_nC_r$ என்று பலவகை முறைகள் உள்ளன. எனவே கூட்டல் மதிப்பு உள்ள நிகழ்திறன் ${}_nC_r\ p^r q^{n-r}$. இது $(p+q)^n$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் ஒரு பொது உறுப்பு ஆகும். ஆனால் இது பொதுவாக $(q+p)^n$ என்று கருதப்படும். வெற்றிகள் 0, 1, 2, 3 என்ற முறையில் அமையும் வழியில் இது $(q+p)^n$ என்று எழுதப்படும்.

விரிவாக்கம்

ஈருறுப்புக் கோவையும் அதன் விரிவாக்கமும் கீழ்வருமாறு :

$$(q+p)^n = q^n + {}_nC_1\ q^{n-1}\ p + {}_nC_2\ q^{n-2}\ p^2 + {}_nC_3\ q^{n-3}\ p^3 \ldots\ldots + {}_nC_r\ q^{n-r} p^r + \ldots \ldots + {}_nC_{(n-1)}\ q p^{n-1} + {}_nC_n\ p^n$$

முன் கூறியதுபோல் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையையும் அவைகளுக்குரிய நிகழ்திறனையும் கீழ்வரும் அட்டவணையில் அமைக்கலாம்.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்திறன்
0	${}_nC_0 \quad q^n p^o = {}_nC_0\, q^n = q^n$
1	${}_nC_1 \quad q^{n-1}\, p$
2	${}_nC_2 \quad q^{n-2}\, p^2$
3	${}_nC_3 \quad q^{n-3}\, p^3$
4	${}_nC_4 \quad q^{n-4}\, p^4$
......	
r	${}_nC_r \quad q^{n-r} p^r$
......	
(n—1)	${}_nC_{(n-1)}\; qp^{n-1}$
n	${}_nC_n\, q^o p^n$ (or) ${}_nC_n\, p^n = p^n$

மேலே கொடுத்த அட்டவணை ஈருறுப்பு அலைவெண் பரவல் எனப்படும். சுருக்கமாக ஈருறுப்புப் பரவல் எனப்படும் இதைக் கீழ்கண்டவாறு விளக்கலாம் :

ஒரு சோதனை 'n' முறைகள் நடத்தப்பட்டது. அதில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்குரிய வாய்ப்பு 'p' ஆகவும், தோல்விக்குரிய வாய்ப்பு 'q' ஆகவும் இருந்தன. ஆனால் $(p + q) = 1$ எனவும் இருக்குமானால் 0, 1, 2, 3 .... என்ற எண்ணிக்கை உடைய வெற்றிகள் தோன்றுவதற்குரிய நிகழ்திறனை $(q + p)^n$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் உறுப்புகளாக எடுத்துக்கொள்ளவும்.

'n' எண்ணிக்கை கொண்ட ஒவ்வொரு சோதனையும் N தடவைகள் நடத்தப்படுமானால், 0, 1, 2, 3 என்ற எண்ணிக்கையுடைய வெற்றிகள் தோன்றுவதற்குரிய அளவை $N(q + p)^n$ என்ற விரிவாக்கத்தின் உறுப்புகளாக இருக்கும், ஈருறுப்புப் பரவல் கீழ்க்கண்ட கோட்பாடுகளில் அமைந்திருக்கும்:

(1) நிகழ்ச்சிகள் 0, 1, 2, 3, ...என்ற தொடரில்லா எண்ணிக்கையாக இருக்குமேயொழிய 1·1, 1·2, ... என்ற தொடர் எண்ணிக்கையாக இருக்காது.

(2) ஒவ்வொரு சோதனையின் போதும் நிகழ்திறன் 'p' என்பது ஒன்றுபோலிருக்கும். இதை வேறுவிதமாகக் கூறின், இந் நிகழ்ச்சியின் தோல்விக்குரிய நிகழ்திறன் $q = 1-p$ என்பது சமமாக எல்லாச் சோதனைகளிலும் இருக்கும். சுருக்கமாக p மற்றும் q என்ற இரு அளவு களின் மதிப்பு எல்லாச் சோதனைகளிலும் நிலையான தாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு நாணயம் ஐந்து முறை சுண்டப்பட்டது. இரண்டு முறை தலையும், மூன்று முறை அதன் மறுபக்கமும் தோன்று வதற்கான நிகழ்திறன் என்ன ?

நாணயம் 5 முறை சுண்டப்பட்டதால் $n = 5$. தலை தோன் றுவதற்குரிய வாய்ப்பை 'p' என்றும் மறுபக்கம் தோன்றுவதற் குரிய வாய்ப்பை 'q' என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

ஒரு சோதனையில் தலை தோன்றுவதற்குரிய வாய்ப்பு 1/2.

$q = 1 - p = 1 - 1/2 = 1/2.$

இங்கு இரண்டு தலைகளும் 3 அதன் மறுபக்கங்களும் தோன் றுவதற்குரிய நிகழ்திறன் காணவேண்டும். 'n' சோதனை களில் 'r' சோதனைகளில் வெற்றிக்குரிய நிகழ்திறன் ${}_nC_r \; q^{n-r} p^r$ என்பது தெரிந்தது. இந்த எடுத்துக்காட்டில் $n = 5, \; r = 3, p = 1/2, q = 1/2$

∴ இரு வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்திறன் $= {}_5C_2 \, p^2 q^3$

$$= {}_5C_2 \, (1/2)^2 \, (1/2)^3$$
$$= {}_5C_2 \, (1/2)^5$$
$$= \frac{5 \times 4}{1 \times 2} \times (1/2)^5$$
$$= 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{5}{16}$$

எடுத்துக்காட்டு

நாணயங்களின் எண்ணிக்கை $= 4$

தேவைப்படும் தலைகளின் எண்ணிக்கை $= 2$

$p = 1/2$

$q = 1/2$

இரு தலைகள் தோன்றுவதற்குரிய

நிகழ்திறன் ${}_4C_2\ \ (1/2)^2\,(1/2)^2$

$$= \frac{4 \times 3}{1 \times 2} \times (\tfrac{1}{2})^4$$

$$= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரியும் மூலவிலக்கமும்

சராசரி $= np$

மூலவிலக்கம் $= \sqrt{npq}$

இவ் வாய்பாடுகளின் நிருபணம் இவ் வகுப்புப் பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியாகும் மின் விளக்குகளில் பழுதாவதற்குரிய நிகழ்திறன் 0.01. 1 லட்சம் மின்விளக்குகள் கொண்ட குழுவின் பழுதான விளக்குகளின் சராசரி, அவற்றின் மூல விலக்கம் என்ன?

$$n = 1{,}00{,}000, \quad p = 0.01 \quad q = 0.99$$

சராசரி $= np = 1{,}00{,}000 \times 0.01 = 1{,}000.$

மூலவிலக்கம் $= \sqrt{npq}$

$$= \sqrt{1{,}00{,}000 \times .01 \times .99}$$

$$= \sqrt{990} = \sqrt{9.9 \times 100}$$

$$= \sqrt{9.9} \times 10$$

$$= 3.146 \times 10 = 31.5$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் குணங்கள்

1. ஈருறுப்புப் பரவலின் பொது அமைப்பு n, p மற்றும் q என்ற அளவுகளைப் பொறுத்திருக்கும்.
2. p மற்றும் q என்ற இரு அளவுகளும் சமமாக இருந்தால் ஈருறுப்புப் பரவல் சமச் சீர்புடையதாக இருக்கும்.

3. p மற்றும் q என்ற அளவுகள் சமமில்லாதிருந்தால் பரவல் ஒரு பக்கம் சாய்ந்து அல்லது கூன் விழுந்து காணப் படும்.

4. p மற்றும் q என்ற அளவுகள் சமமில்லாதிருந்த போதிலும், n-ன் அளவு மிக அதிகமாகயிருக்கும் போதும் பரவல் சமச்சீர்மை நோக்கிச் செல்லும்.

5. பரவலின் சராசரியும் மூலவிலக்கமும் முறையே np மற்றும் $\sqrt{npq}$ என்பவற்றிற்குச் சமமாக இருக்கும்

மரபு பரவல் (அல்லது) இயற் பரவல் (Normal Distribution)

ஈருறுப்புப் பரவல் ஒரு தொடர்பற்ற பரவலாகும். ஆனால் p மற்றும் q யின் மதிப்புகள் 1/2 யாக இருந்து, nன் மதிப்பு மிக அதிகமாயிருந்தால் ஈருறுப்புப் பரவல் சமச் சீர்புடையதாகயிருப்ப தோடன்றித் தொடர்புடைப் பரவலாகவும் மாறும். இத்தகைய சமச்சீர் தொடர்புடைப் பரவல் மரபு பரவல் அல்லது இயற் பரவல் எனப்படும்.

இயற் பரவலை வரைபட மூலமாகவும் விளக்கலாம். இயற் பரவலின் வரைபடம், இயல் வளைகோடு அல்லது இயல் நிகழ் திறன் வளைகோடு எனப்படும். இயல் வளைகோட்டிற்கான சமன்பாடு கீழ்வருமாறு :—

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

இங்கு $\bar{x}$ என்பது சராசரியாகும்.

σ என்பது மூலவிலக்கமாகும்.

$\pi = 3.1418$

$e = 2.71828$

$y =$ வளைவின் ஆரம்பத்திலிருந்து x என்ற தூரத்தில் வளைவின் உயரத்தைக் குறிக்கும்.

பொதுவாகச் சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

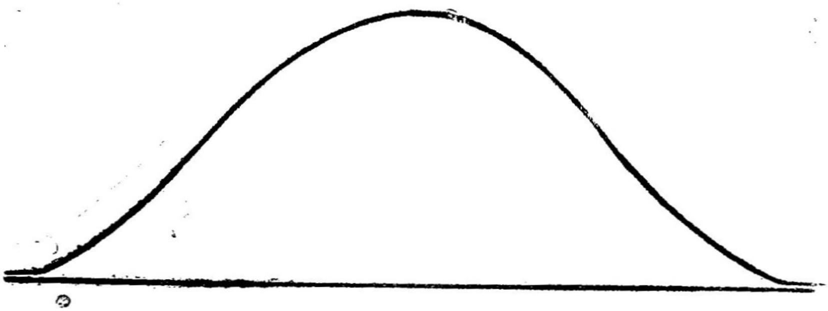
$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

இங்கு $t = \frac{(x-\bar{x})}{\sigma}$

இங்கு N = 1 என இருக்கும்போது சமன்பாடு கீழ்க்கண்ட வாறு அமையும்.

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

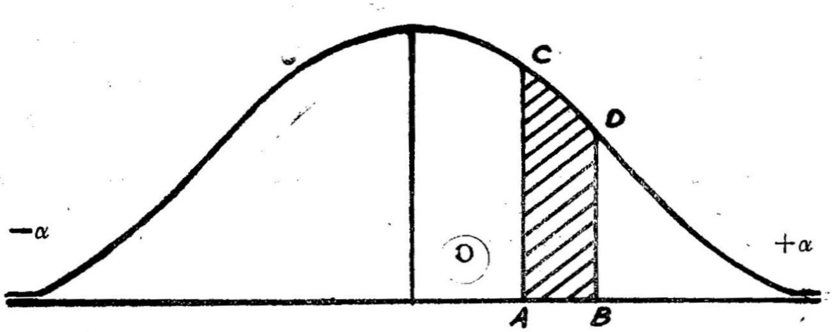
இதுதான் இயல் வளைகோட்டிற்கான சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பாகும். வளைவின் உருவமும் மணி போன்றிருக்கும்.



படம் 1—1. மரபு வளைகோடு

N = 1 என இருந்தால் வளை பரப்பிற்கிடையேயுள்ள பரப்பை 1 என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

ஆதியிலிருந்து t_1 மற்றும் t_2 தூரத்தில் இரு புள்ளிகளை வரைபடத்தின் அடிப்பாகத்தில் எடுத்துக்கொள்வோம். இப் புள்ளிகளிலிருந்து செங்குத்துக் கோடுகளை மேல் நோக்கி வரைந்து வளைகோட்டை வெட்டும்படிச் செய்வோம். இவ்விரு செங்குத்துக் கம்பங்களின் இடையேயுள்ள வளைகோட்டின்



படம் 1—2.

மரபு வளைவு கோட்டின் இரு கம்பங்களிடையே உள்ள பரப்பு.

பரப்பு, ' t ' என்ற ஓர் உறுப்பின் மதிப்பு ' t_1 ' மற்றும் 't_2' என்ற மதிப்புகளுக்கிடையே யிருப்பதற்குரிய நிகழ்திறனைக் குறிக்கும்.

இவ்வளைகோடு — ∝ புள்ளியிலிருந்து O வழியாக ∝ புள்ளி வரைச் செல்வதால் மையப் புள்ளியாகிய ' O ' வை ஆதியாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது, மேலும் $OA=t_1$, $OB=t_2$ எனவும் வைத்துக்கொள்வோம் AC மற்றும் BD என்ற இரு கோடுகளும் At_1 தூரத்திலும் மற்றும் B t_2 தூரத்திலுமுள்ள புள்ளிகளிலிருந்து எழுப்பப்பெற்ற கம்பங்களாகும்.

வளைகோட்டின் இரு கம்பங்களுக்கிடையேயுள்ள
பரப்பு = ABCD என்பவற்றின் பரப்பாகும்.

கீழே கொடுத்துள்ள அட்டவணை $\int_{-\alpha}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

என்ற விதியில் விளக்கப்படும் வளைகோட்டின் —∝லிருந்து ' t ' தூரத்தில் வரையப்பட்ட கம்பத்திற்கும் வளை கோட்டிற்கு யிடையேயுள்ள பரப்பைக் குறிப்பதாகும்.

't' யின் மதிப்பு	பரப்பு	't' யின் மதிப்பு	பரப்பு
		0·0	0 5(00
—0.1	0.4602	0·1	0 5398
—0,2	0.4207	0·2	0·5793
—0.3	0.3821	0·3	0·6179
—0 4	0.3446	0·4	0·6554
—0.5	0.3085	0.5	0·6915
– 0.6	0.2743	0 6	0·7257
—0.7	0.2420	0·7	0·7580
—0.8	0.2119	0·8	0·7881
—0.9	0.1841	0.9	0.8159
—1 0	0.1587	1.0	0.8413
—1.1	0.1357	1.1	0.8643
—1.2	0.1151	1.2	0.8849
—1.3	0.0968	1.3	0.9032
—1.4	0.0808	1.4	0.9192
—1.5	0.0668	1.5	0.9332
—1.6	0.0548	1.6	0 9452
—1.7	0.0446	1.7	0.9554
—1.8	0.0359	1.8	0.9641
—1.9	0.0287	1.9	0.9713

't' யின் மதிப்பு	பரப்பு	't' யின் மதிப்பு	பரப்பு
—2.0	0.0228	2.0	0.9772
—2.1	0.0179	2.1	0.9821
—2.2	0.0139	2.2	0.9861
—2.3	0.0107	2.3	0.9893
—2.4	0.0082	2.4	0.9918
—2.5	0.0062	2.5	0.9938
—2.6	0.0047	2.6	0.9953
—2.7	0.0035	2.7	0.9965
—2.8	0.0026	2 8	0.9974
—2.9	0.0019	2.9	0.9981
—3.0	0.0013	3 0	0 9987

ஒரு பரவலின் சராசரியும் மூலவிலக்கமும் கொடுக்கப்பட்டால், மேலுள்ள அட்டவணை உதவிகொண்டு, ஓர் உறுப்பின் மதிப்பு, கொடுக்கப்படும் இரு மதிப்புகளுக்கிடையில் இருப்பதற்குரிய நிகழ்திறனை அல்லது சாத்தியக் கூற்றைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

ஓர் இயற்பரவலின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

சராசரி	20
மூலவிலக்கம்	4

't' என்ற உறுப்பின் மதிப்பு 20—24 என்ற எல்லைகளுக்குள் அடங்குவதற்குரிய நிகழ்திறனைக் காணவும்.

$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ என்பது தெரிந்ததே.

x-ன் மதிப்பு 20 ஆனால் t யின் மதிப்பு

$$= \frac{20 - 20}{4} = \frac{0}{4} = 0 = t_1$$

x-ன் மதிப்பு 24 ஆனால் t யின் மதிப்பு

$$= \frac{24 - 20}{4} = \frac{4}{4} = 1 = t_2$$

x-ன் மதிப்பு 20—24 என்ற எல்லைக்களுக்குள்ளிருப்பதென்பது 't' 0—1 என்ற எல்லைகளுக்குள் இருப்பதற்கொப்பாகும்.

எனவே t, 0—1 என்ற எல்லைகளுக்குள் அடங்குவதற்குரிய நிகழ்திறனைக் காணவேண்டும். இந்த நிகழ்திறன் வளை கோட்டிற்கும், x-அச்சிற்கும். மற்றும் ஆதியிலிருந்தும் 0 மற்றும் 1 அளவு தூரத்தில் எழுப்பப்படும் இரு கம்பங்களுக்குமிடையேயுள்ள பரப்பளவைக் குறிப்பதாகும்.

மேலேயுள்ள அட்டவணையிலிருந்து 't' யின் மதிப்பு 1 ஆக இருக்கும்போது இப்பரப்பு 0·8413 எனத் தெரியும். எனவே நிகழ்திறன் = 0.8413.

மேலும் t யின் மதிப்பு 0 ஆக இருக்கும் போதுள்ள பரப்பும் நிகழ்திறனும் 0.5000 ஆகும். எனவே tயின் மதிப்பு 0 to 1 என்ற எல்லைகளுக்கிடையே அமைவதற்கான நிகழ்திறன்

$$0.8413 - 0\ 5000 = 0.3413$$

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டில் x-ன் மதிப்பு 24—28 என்ற எல்லைகளுக்கிடையே அமைவதற்குரிய சாத்தியக் கூறு காணலாம்.

x-ன் மதிப்பு 24 என்றால்

$$\text{'t' யின் மதிப்பு} = x - \bar{x} = \frac{24 - 20}{4} = \frac{4}{4} = 1 = t_1$$

$$\text{x-யின் மதிப்பு 28 என்றால் t யின் மதிப்பு} = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$= \frac{28 -}{4} = \frac{8}{4} = 2 = t_2$$

x-ன் மதிப்பு 24 — 28 என்ற வரையறைக்குள் அமைவதென்பது t யின் மதிப்பு 1—2 என்ற எல்லைகளுக்குள் அமைவதற் கொப்பாகும். t யின் மதிப்பு ' +2 ' என்ற எல்லைக்குள் அமைவற்குரிய சாத்தியக்கூறு = 0—.9772

t யின் மதிப்பு 1 என்ற எல்லைக்குள் அமைவதற்குரிய சாத்தியக் கூறு = 0.8413

t யின் மதிப்பு 1—2 என்ற எல்லைகளுக்கிடையே அமைவதற்குரிய சாத்தியக்கூறு = 0.9772 — 0.8413.

$$= 0.1359$$

மேலே கூறிய எடுத்துக்காட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட நபரின் மதிப்புக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைவதற்குரிய நிகழ்திறனைக் கணிக்கவும்.

(1) 12க்கும் குறைவாக இருப்பதற்குரியது.

(2) 12 மற்றும் 16 என்ற அளவுகளிடையே இருப்பதற் குரியது.

(3) 16 மற்றும் 28 என்ற அளவுகளிடையே இருப்பதற் குரியது.

எடுத்துக்காட்டில்

சராசரி $\bar{x} = 20$

விலக்கம் $\sigma = 4$

(i) $t = \dfrac{x-\bar{x}}{\sigma} = \dfrac{12-20}{4} = -2$

$+2$ என்ற t யின் நேர் அளவிற்கான

நிகழ்திறன் $= 0.9772$

-2 என்ற எதிர்மறை அளவிற்கான

நிகழ்திறன் $= 1-0.9772$

$= 0.0228.$

(ii) $t_1 = \dfrac{x-\bar{x}}{\sigma} = \dfrac{12-20}{4} = -2$

$t_2 = \dfrac{x-\bar{x}}{\sigma} = \dfrac{16-20}{4} = -1$

$t_1 = -2$ என்பதற்கான நிகழ்திறன்

$= 1-0.9772 = 0.0228$

$t_2 = -1$ என்பதற்கான நிகழ்திறன்

$= 1 - 0.8413 = 0.1587$

$t_1\,(-2)$ மற்றும் $t_2\,(-1)$ என்பவற்றிற்கிடையில் 't' இருப் பதற்கான சாத்தியக்கூறு $= 0.1587 - 0.0228 = 0.1359.$

(iii) $t_1 = \dfrac{x_1 - \bar{x}}{\sigma} = \dfrac{16 - 20}{4} = -1$

$$t_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{28 - 20}{4} =$$

t = −1 என்பதற்குரிய நிகழ்திறன்

$= 1 - 0{\cdot}8413 = 0{\cdot}1587$

t = +2 என்பதற்கான நிகழ்திறன்

$= 0{\cdot}9772$

t_1 மற்றும் t_2 என்பவற்றிற்கிடையே அமைவதற்கான நிகழ்திறன்

$= 0.9772 - 0.1587$

$= 0.8185$

பரவலின் மொத்த அலைவெண்ணும் (N) நிகழ்திறனும் தெரியுமானால், இவ்விரண்டையும் பெருக்கி ஒரு மதிப்பிற்குரிய அலைவெண்ணையும் கணிக்கலாம்.

ஓர் இயற் பரவலின் மொத்த அலைவெண் 1000; சராசரி 35; மூலவிலக்கம் 7. எனவே 42—49 என்ற மதிப்புகளுக்கிடையேயுள்ள அலைவெண்ணைக் காண்க.

$N = 1000; \quad \bar{x} = 35; \quad \sigma = 7;$

x = 42 ஆனால் $t = \frac{42 - 35}{7} = 1$

x = 49 ஆனால் $t = \frac{49 - 35}{7} = 2$

t யின் மதிப்பு 2 என்ற எல்லைக்கிடையே x அல்லது x யின் மதிப்பு 49 என்ற எல்லைக்குள் அமைவதற்குரிய வாய்ப்பு = 0.9772

t-யின் மதிப்பு + 1 என்ற எல்லைக்குள் அல்லது x-ன் மதிப்பு 42 என்ற எல்லைக்குள் அமைவதற்குரிய வாய்ப்பு = 0.8413.

∴ x-ன் மதிப்பு 42—49 என்ற எல்லைகளுக்கிடையே

அமைவதற்குரிய வாய்ப்பு $= 0.9772 - 0.8413 = 0{\cdot}1359$

∴ அலைவெண் $= 1000 \times 0.1359 = 135.9 \simeq 136.$

இயல் (மரபு) வளைகோட்டின் குணங்கள்

1 மரபு அல்லது இயல் வளைகோடு ஒரே முகடுடையதும் சமச் சீர்பான சரியான மணி வடிவம் கொண்டதுமாகும்

2. சராசரியும் நடுவனும் முகடுடனே ஒன்றியிருக்கும்.

3. வளைகோட்டின் மொத்தப் பரப்பு, பரவலின் மொத்த அலைவெண்ணிற்குச் சமமாகயிருக்கும். ஆதியிலிருந்து சராசரிக்குச் சமமான தூரத்திலிருந்து வரையப்படும் கம்பம் வளைகோட்டின் பரப்பை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும்.

4. கூனின் கெழு அளவு = 0

5. β_2 ன் கூர் அளவு = 3

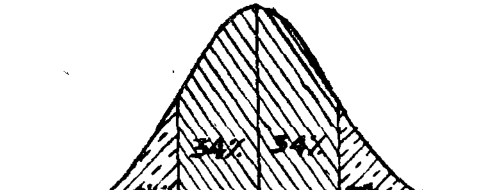
6. இரு கால்ம அளவுகளும் சம தூரத்திலிருக்கும்.

7. மொத்த அலைவெண்ணில் 68 சதவீதம், $\bar{x}-1\sigma$, மற்றும் $\bar{x}+1\sigma$ என்று வரையறைக்குள் அமைந்திருக்கும்.

8. மொத்த அலைவெண்ணின் 95 சதவீதம், $\bar{x}-2\sigma$ மற்றும் $\bar{x}+2\sigma$ என்ற வரையறைக்குள் அமைந்திருக்கும்.

9. மொத்த அலைவெண்ணில் 99 சதவீதம் $\bar{x}-3\sigma$ மற்றும் $\bar{x}+3\sigma$ என்ற வரையறைக்குள் அமைந்திருக்கும்.

இவ்வரையறைகளைக் கீழே கொடுத்துள்ள படம் விளக்கும்.



படம் 1—3.

நம்பக எல்லைகள்

பாயிசான் பரவல் (Poisson Distribution)

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் p மற்றும் q என்ற அளவுகள் சமமாகயில்லாதிருந்தாலும், 'n' ன் மதிப்பைப் போதுமான அளவு அதிகப்படுத்தினாலும் கடைசியில் ஈருறுப்புப் பரவல் இயற் பரவலாக மாறிவிடும் என்பதை முன்பு படித்தோம். தற்போது ஒரு பரவலில் p யில் அளவு மிகக் குறைவாகவும் 'n' அளவு மிக அதிகமாகவும் அதே நேரத்தில் np யின் அளவு ஒரு முடிவான அளவாகவும் இருந்தால், பரவல் பாயிசான் பரவலாக அமையும்.

இது பாயிசான் கோர்வை அல்லது பாயிசான் பரவல் அல்லது பாயிசான் அடுக்கு வரையறை எனப்படும். நடைமுறையில் இத்தகைய பரவலின் பயன் மிகக் குறைவே. எனவே, இதற்கான எடுத்துக்காட்டுகள் p யின் மதிப்பு மிகக் குறைவாகயிருப்பதால் அபூர்வ நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். ஒரு நகரில் மக்கட் தொகை அதிகமாகயிருப்பதால் வாகன விபத்தால் மடிவோரின் எண்ணிக்கை நாள்தோறும் அதிகமாகயிருக்க வேண்டுமென்று எதிர்பார்த்த போதிலும் நடைமுறையில் இவ்வாறு மடிவோரின் எண்ணிக்கை மிகமிகக் குறைவாகவேயிருப்பதால் அது இத்தகைய பரவலைப் போன்றிருக்கும் எனக் கூறலாம்.

இதை மேலும் விளக்கலாம். ஒரே சோதனையின்போது t என்றதோர் நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்திறன் 'p' என்றிருந்தால் np யின் அளவு ஒரு நிலையான அளவான 'm' க்குச் சமமாகயிருக்குமாறு அதிக அளவில் 'n' சோதனைகள் நடத்தினால், ஒரு நிகழ்ச்சி சரியாக 'x' முறைகள் நடப்பதற்குரிய நிகழ்திறன் கீழ்க் கண்டவாறு கொடுக்கப்படும்;

$$p(x) = \frac{e^{-m}\ m^{x}}{1 \times 2 \times \ldots\ldots x}$$

ஓர் ஈருறுப்பு பரவலில் 'n' சோதனைகளில் 'x' சோதனைகளில் வெற்றி பெறுவதற்குரிய நிகழ்திறன் கீழ்க் கண்டவாறுயிருக்கும் என்பது தெரிந்ததே.

$$p(x) = {}_{n}C_{x}\ \ p^{x}\ q^{n-x}$$

இதில் pயின் மதிப்பு m/n என்று மாற்றினால்

$$p(x) = \frac{m^{-m} m^{x}}{\underline{|x}}$$ என்று மாறும்.

இதில் $\underline{|x} = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots \times x$

எல்லா நிகழ்திறன்களின் கூட்டு

பாயிசான் பரவலில் x-ன் மதிப்பும் அதற்கான நிகழ்திறனும் கீழ் வருமாறு :

x-ன் மதிப்பு	நிகழ்திறன்
0	$\frac{e^{-m} m^{0}}{0!}$
1	$\frac{e^{-m} m^{1}}{1!}$
2	$\frac{e^{-m} m^{2}}{2!}$
—	—
x	$\frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$

எல்லா நிகழ்திறன்களின் கூட்டு = 1.

$$e^{-m}\left(1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$e^{-m} \times e^{m} = 1$$

ஏனெனில்

$$e^{1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}$$

$$e^{m} = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\ldots)$$

நிலையான அளவுகள்

பாயிசான் பரவலில் 'm' என்ற ஒரே ஒரு நிலையான அளவு உண்டு. இதன் மதிப்பு எளிய சராசரியின் மதிப்பாகும்

சராசரியும் மூலவிலக்க வர்க்கமும்

பாயிசான் பரவலில், வர்க்கத்தின் மதிப்பு சராசரியின் மதிப்பிற்குச் (m) சமமாகும். இவ்வுண்மையை வைத்தே ஒரு பரவல் பாயிசான் பரவலை ஒத்துள்ளதா இல்லையா என்பதை அறுதியிடலாம்.

பாயிசான் பரவலுக்கான சிறந்ததோர் எடுத்துக்காட்டு, போர் வீரர்களின் 10 அணியில் 20 ஆண்டுகளில் நாள்தோறும் குதிரை எற்றியதால் இறந்தவர்களின் பரவலாகும்.

x	f
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
4 க்கு மேல்	0
	200

இதில் $\bar{x}$ மற்றும் σ^2 என்ற அளவுகளைக் கணிப்போம்;

x	f	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
0	109	0	0
1	65	65	65
2	22	44	88
3	3	9	27
4	1	4	16
4 க்குமேல்	0	0	0
	200	122	196

$$\bar{x} = m = \frac{122}{200} = 0.61$$

$$\text{மூல விலக்க வர்க்கம்} = \frac{196}{200} - 0.61 \times 0.61$$
$$= 0.98 - 0.3721$$
$$= 0.6079$$
$$= 0.61$$

பயிற்சி

1. நிகழ்திறன் அல்லது சாத்தியக் கூறு பற்றி விளக்குக.
2. நிகழ்திறனின் கூட்டு விதி தேற்றத்தை ஒரு மேற்கோள் காட்டி விளக்குக.
3. நிகழ்திறனின் பெருக்கல் தேற்றத்தை ஓர் எடுத்துக் காட்டுடன் விளக்குக.
4. இரண்டு பகடைக் காய்களை உருட்டும்போது கிடைக்கும் பக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 10 என வருவதற்குரிய நிகழ்திறனைக் காண்க.
5. ஒரு தாழியில் 5 சிவப்புப் பந்துகளும் 10 பச்சைப் பந்து களும் உள்ளன. இதிலிருந்து 8 பந்துகள் தொடர்ந்தாற் போல் எடுக்கும்போது அதில் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் 5 பச்சைப் பந்துகளும் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்திறன் என்ன ?
6. A மற்றும் B என்ற இருவரும் தனித்தனியே 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற எண்களிலிருந்து ஓர் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்கின்றனர். அவ்விரண்டு எண்களின் (அ) கூட்டுத்தொகை (1) 15 (2) 10 (3) 12 என்று அமைவதற்கான நிகழ்திறனை யும் (ஆ) இரண்டு எண்களின் பெருக்கற்பலன் (1) 24 (2) 54 (3) 39 என்றிருப்பதற்கான நிகழ்திறனையும் காண்க.
7. சராசரி 15 ஆகவும் மூலவிலக்கம் $\sqrt{6}$ ஆகவும் வரக் கூடிய ஈருறுப்புப் பரவலைக் கண்டுபிடி.
8. ஒரு நாணயத்தை ஒருவன் 8 முறை சுண்டுகின்றான். இதில் (1) எல்லாம் தலையாகவும் (2) 6 தலை யாகவும் 2 அதன் மறுபக்கமாகவும் (3) 5 அல்லது அதற்குக் குறைவான தலையாகவும் நேரக்கூடிய நிகழ் திறன் என்ன ?
9. பாயிசான் பரவலின் புள்ளியியல் சராசரி மற்றும் வேறு பாடு என்பதைக் கொடு.
10. மரபு பரவல் அல்லது இயற் பரவலின் பண்புகளைக் கூறு.

அத்தியாயம் 2

மாதிரி ஆய்வுகள் (Sample Surveys)

புள்ளி விவரங்கள் எவ்வாறு சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பது பற்றி முன்பு படித்தோம். புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்படும் பல்வேறு முறைகள் பற்றியும், தபால் முறை மற்றும் பதிவு முறை கணிப்பு முறைகளில் உள்ள நிறை குறைகள் பற்றியும் கண்டோம்.

மாதிரி முறைத் தோற்றுவாய்

புள்ளியியல் ஆய்வாளர்கள் நடைமுறையில், தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பினரையும் குறித்து ஆய்வு செய்ய முடியாத சிரமத்தில் உள்ளனர். சில வேளைகளில் தொகுதியின் பண்பை ஆராயும்போது தொகுதியையே அழிக்கவேண்டிய நிலை ஏற்படலாம். இச் சூழ்நிலையில் தொகுதியில் உள்ள ஒரு சிறு குறிப்பிட்ட உறுப்பினர்களை மாத்திரம் ஆய்வு செய்து விட்டு, தொகுதியில் உள்ள இதர நபர்களின் குணத்தையும் அவர்களே பிரதிபலிப்பர் என எடுத்துக்கொள்வதைத் தவிர வேறு வழியில்லை. இத்தகைய இச் சிறு உறுப்பினர்களின் பகுதியே 'தொகுதியின் மாதிரி' எனப்படும். இதுவே மாதிரி முறையின் தோற்றுவாயாகும்.

முழுக்கணிப்பு

முன்பு கூறியதுபோன்று, புள்ளியியல் ஆய்வாளரின் முதற் பணி புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதே. புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் உள்ள ஒரு முறை முழுக் கணிப்பாகும். இம் முறை, ஆய்விலடங்கிய எல்லா உறுப்பினர்கள் பற்றிய விவரங்களைச் சேகரிப்பது ஆகும். நம் நாட்டில் நடைபெறும் மக்கள்தொகைக் கணிப்பும் கால்நடைக் கணிப்பும் இதற்கான சரியான எடுத்துக் காட்டுகளாகும்.

மாதிரி

ஒரு தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கைகொண்ட உறுப்பினர்களோ அல்லது உறுப்பு களோ கொண்ட ஒரு பகுதி 'மாதிரி' எனப்படும். மேலும் அத்தகைய பகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புகளும் மாதிரி எனப்படும். தொகுதி, முடிவுள்ள தொகுதி (Finite Universe), முடிவில்லாத் தொகுதி (Infinite Universe) என இருவகைப் படும். முடிவுள்ள தொகுதியில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை கொண்டதாக இருக்கும். ஆனால் முடிவில்லாத தொகுதியில் உள்ள நபர்களின் அல்லது உறுப் பினர்களின் அளவு, எண்ணிக்கையற்றதாக இருக்கும். ஒரு குறிப் பிட்ட நிகழ்ச்சியின், நினைத்துப் பார்க்கும் எல்லா விதங்களிலும் நடக்கும் மொத்தக் கூட்டுத்தொகுதி 'எடுகோள் தொகுதி' (Hypothetical Universe) எனப்படும். ஒரு நாணயத்தைக் கொண்டோ அல்லது பகடைக் காயைக் கொண்டோ எறியும் எல்லா விதமான எண்ணிக்கையற்ற தொகுதி இதன்பாலதாகும்.

மாதிரி ஆய்வின் நன்மைகள்

முழுக் கணிப்பிற்குப் பதிலாக அமையும் இன்னொரு முறை மாதிரி முறை. முழுக்கணிப்பில் அடங்கிய உறுப்பினர்களின் ஒரு சிறு பகுதியினர் குறித்து விவரங்கள் சேகரிப்பதற்குக் குறைந்த ஆள் பலமும், குறைந்த செலவும் போதுமானது. இதன் காரணமாகப் பயிற்சி அளிப்பதில் சிரமமிராது. இத்தகைய அனுகூலங்களால் இம் மாதிரி ஆய்வுகளை மீண்டும் மீண்டும் நடத்தி ஒரு தொடராக விவரங்களைச் சேகரிக்கலாம். மேலும் வருங்கால ஆய்விற்காகப் பயிற்சியுள்ள ஆய்வாளர்களையும் கணிப்பாளர்களையும் உருவாக்கலாம். முழுக்கணிப்பே சாத்திய மில்லாத இடங்களும் உண்டு. அங்கெல்லாம் மாதிரி முறை களையே கையாள வேண்டியுள்ளது. மேலும், முழுக் கணிப்பில் சேகரித்த விவரங்களின் தன்மையை மாதிரி முறைகள் மூல மாகவே சோதிக்க முடியும். மாதிரி ஆய்வுகள் மூலம் முன் கூட்டியே மதிப்புகளையும் கொடுக்கமுடியும்.

எல்லா மாதிரி ஆய்வுகளிலும் கடைசியில் கிடைக்கும் விவரங்கள் யாவும் மதிப்பீடுகளேயல்லாது உண்மையானவை யல்ல. பொருத்தமான மாதிரி ஆய்வு முறைகளைக் கையாண்டு, மதிப்பீட்டில் காணும் குறைகளையும் மதிப்பிட முடியும். சில இடங்களில் இக் குறைகளின் அளவையும் முன்கூட்டியே மதிப்

பிட்டுக் கூறமுடியும். பொதுவாக நிருவாகத்தினருக்கு மிகவும் சரியான உண்மை விவரம் எப்போதும் தேவைப்படாதிருக்கலாம். கொள்கைகளையும் முடிவுகளையும் எடுப்பதற்கு ஏற்றுக் கொள்ளக்கூடிய மிகக் குறைந்த குறையுடன் கூடிய விவரங்களின் மதிப்பீட்டைக் கொடுத்தால் போதுமானதாயிருக்கலாம். இவ் விடங்களிலெல்லாம் மாதிரி ஆய்வுகளே பொருத்தமான கருவிக ளாகும். தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு நபரையும் குறித்து விவரங்கள் தேவைப்படுமிடங்களிலெல்லாம் மாதிரி ஆய்வு முறைகள் பயன்படா.

முன்பு கூறியதுபோல் உறுப்பினர்களின் கூட்டு, 'தொகுதி' (Universe) என்றும் தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் மாதிரி (Sample) எனவும் புள்ளியியல் முறையில் அழைக்கப் படும். இத்தகைய மாதிரி உறுப்புகள் இயற்கையானவை யாகவோ அல்லது செயற்கையானவையாகவோ இருக்கலாம். மாதிரி உறுப்புகள் யாவும் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதில்லை. எனினும் ஓர் ஆய்வைப் பொறுத்த அளவில் மாதிரி உறுப்பு களைத் தெளிவாகச் சந்தேகத்திற்கிடமின்றி விளக்கலாம்.

மாதிரி ஆய்வின் குறிக்கோளே, குறைந்த செலவில் குறுகிய காலத்தில் தொகுதியைப் பற்றியுள்ள விவரத்தின் மதிப்பீட்டை, ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய சிறிய அளவு குறைகளுடன் கணிப்பதே. பொருத்தமான இடங்களில் பொருத்தமான ஆய்வு முறைகளைக் கையாளும்போதுதான் இக்குறிக்கோள் நிறைவேறும். எனவே புள்ளியியல் வல்லுநர்களால் பல்வேறு ஆய்வு முறைகள் உரு வாக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் நிறை குறைகள் உண்டு.

மாதிரிப் பட்டியல் (Sampling Frame)

தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்பினர்களைப் பற்றிக் குறிப்பிடும் பட்டியலே மாதிரிப் பட்டியல் அல்லது மாதிரி அட்டவணை எனப்படும். மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு இதுவே அடிப்படையாகும். ஆய்வின் அமைப்பைப் பொறுத்து, மாதிரிகளைத் தெரிந்தெடுப்பதற்கேற்ற படமோ அல்லது பட்டியலோ அல்லது வேறு எந்த ஆதாரமோ மாதிரிகள் பட்டியலாகும்.

மாதிரிகளின் பட்டியலின் அடிப்படைக் கருத்தென்ன வெனில் தொகுதியைக் குறித்துக் கூடுதல் விவரங்களைக் குறைந்த முயற்சியால் கிடைக்கச் செய்வதே. மாதிரிகளை உருவாக்குவது

என்பது தொகுதியிலிருந்து முன்னரே முடிவு செய்யப்பட்ட தேவையான உறுப்பினர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதே. இதை மூன்று வழிகளில் கையாளலாம்.

(1) நபர்களை எதேச்சையாகத் தேர்ந்தெடுப்பது.

(2) நமது குறிக்கோளுக்குத் தக்கவாறு உறுப்பினர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பது.

(3) முன்னிரு முறைகளும் இணைந்த முறை.

இயைபிலா எதேச்சை மாதிரி முறை (Random Sampling)

எதேச்சை மாதிரிக்கு ஏற்றதோர் விளக்கம் கொடுக்கலாம். ஒரு தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு நபருக்கும் தெரிந்தெடுப்பதில் சம வாய்ப்பு அல்லது சம சந்தர்ப்பம் கொடுக்கப்பட்டு மாதிரிகள் எடுத்தால் அது இயைபிலா மாதிரி முறை எனப்படும். 'n' நபர்கள் கொண்ட மாதிரி இயைபிலா மாதிரி என்று சொல்லப் படுமானால், 'n' நபர்கள் கொண்ட எல்லாவித மாதிரிகளுக்கும் சம வாய்ப்புக் கொடுக்கப்படுகிறது என்று பொருள் படும்.

இயைபிலா மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது எளிதானதல்ல. ஏனோதானோ என்ற முறையில் எடுக்கப்படும் மாதிரிகள் எதேச்சை மாதிரிகள் ஆகா. தனி நபர்களின் விருப்பு வெறுப் பிற்கு ஆளாகாத முறையில் சில முறைகளைப் பின்பற்றுவதாக யிருக்க வேண்டும். மாதிரிகளைத் தெரிந்தெடுப்போர்களின் விருப்பு வெறுப்பு ஏற்படுவதற்கான இடங்களிலெல்லாம் குறை உறுதியாக ஏற்படும். குறைகளை எந்த முயற்சியினாலும் அகற்ற முடியாது. ஏனெனில் மனித சுபாவமே உண்மை நிலை யிலிருந்து விலகிச் செல்லும் தன்மையுடையது.

ஒவ்வொரு நபருக்கும் சம வாய்ப்புக் கொடுக்கப்பட வேண்டு மென்னும் கொள்கையைத் திருத்தியமைக்கலாம். நமது தேர்வு முறை, தொகுதியில் உள்ள நபர்களின் குண அடிப்படையில் அமையாது சுயமாக இருந்தால் ஒரு நபரை விடுத்து வேறு நபரைத் தெரிந்தெடுப்பதற்கு எந்தவிதக் காரணமுமிருக்காது. எனவே, தொகுதியில் காணப்படும் எல்லாக்குணங்களையும் தெரிந் தெடுப்பதற்குச் சம வாய்ப்பு அளிப்பதாக அமையும். எனவே தொகுதியின் உறுப்பினர்களின் குணத்தோடு தொடர்பில்லாத முறையில் தேர்வு முறையைப் பின்பற்றுவதாக இருந்தால் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் மாதிரிகள் இயைபிலா மாதிரிகளாகயிருக்கும் என்று எதிர்பார்க்கலாம். தொகுதியில் உள்ள உறுப்பினர்

களுக்கு வரிசை எண் கொடுத்து, முதலில் ஒரு நபரை எடுத்துப் பின்னர் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளி தூரத்தில் உள்ள வரிசை எண்களுக்கேற்ற நபர்களைத் தெரிந்தெடுத்தால் அது இயைபிலா மாதிரிகளாக அமையும். ஆனால் தொகுதியில் ஒரு குறிப்பிட்ட குணம் அல்லது பண்பு ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குப் பின்னர் மீண்டும் மீண்டும் தோன்றுவதாகயிருந்தால் இது எதேச்சை மாதிரியாகாது.

சிறிய தொகுதி அல்லது சிறு தொகுதி (Miniature Universe)

எதேச்சை மாதிரிகளை நம்பகமான முறைகளில் தெரிந்தெடுப்பதில் ஒரு முறை, சிறியதொரு தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகளைத் தெரிந்தெடுப்பதாகும். இச் சிறிய தொகுதியில் உள்ள உறுப்பினர்கள் தொகுதியிலுள்ள உறுப்பினர்களுக்கு நேருக்கு நேர் இணையானவராவார்கள். இந்தச் சிறிய தொகுதி, ஒரே சாதனத்தாலான ஒரே பருமன், ஒரே உருவம் உடைய சிறு துண்டுத் தாள்களாகவோ அல்லது சிறிய பந்துபோலான வையாகவோ இருக்கலாம். இச்சிறு தொகுதியிலுள்ள உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை, தொகுதியிலுள்ள உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கைக்கு இணையாகும். இச்சிறிய துண்டுத் தாள்களையும் அல்லது சிறிய பந்துகளையும் இது போன்ற ஒரே பருமன், ஒரே உருவமுடைய, ஒரே உலோகத்தாலான சிறிய உருளைகளில் அடைத்து, சுழலும் பெரிய பீப்பாயிலிட்டு அவை நன்றாகக் குலுக்கப்படும். பின்னர் தேவையான எண்ணிக்கை கொண்ட உருளைகள் லாட்டரி சீட்டைப் போன்று வெளியே எடுக்கப்படும்.

தொகுதி பெரியதாக இருந்தால் சிறிய தொகுதியை உருவாக்குவதிலும் நன்றாகக் குலுக்குவதிலும் அல்லது கலக்குவதிலும் சிரமம் ஏற்படும். இந்நிலைகளில் மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு இயைபிலா எதேச்சை எண்கள் பயன்படுத்தப்படும்.

இயைபிலா எதேச்சை எண்கள் (Random Numbers)

டிப்பட், பிஷர், மற்றும் ஏட்ஸ் என்ற புள்ளியியல் வல்லுநர்களால் எதேச்சை எண்கள் கொண்ட பட்டியல் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன. அவை யாவும் புத்தகங்களாக வெளிவந்துள்ளன. இதில் '0' முதல் 9 வரை உள்ள எண்கள் இடமிருந்து வலமாகவோ அல்லது மேல்கீழாகவோ அல்லது மூலைவிட்டமாகவோ அல்லது எம்முறையில் பார்த்தாலும் சம அளவில் அடிக்கடி வருவதாக இருக்கும். மேலும் 00 மற்றும் 99 என்ற இடைவெளியில் உள்ள எல்லா இரண்டு இலக்க எண்களும் சமமாக அடிக்கடி

வருவதாக இருக்கும். எண்களின் வரவு முறை அல்லது வரிசை முறை எந்தவித நியதியையும் பின்பற்றுவதாக இராது. ஓரிலக்க, ஈரிலக்க, மூவிலக்க எதேச்சை எண்களின் பட்டியல் ஒன்று இணைப்பில் நமது உபயோகத்திற்காகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இதிலுள்ள எண்கள் யாவும் உண்மையில் எதேச்சை முறை யிலேயே தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆனால் அவைகள் எதேச்சை முறையில் உள்ளன என்று கூறுவதற்கு அனு பவத்தைத் தவிர வேறு நிரூபணம் இல்லை. 'N' நபர்கள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து, 'n' நபர்கள் கொண்ட மாதிரியை எடுக்கவேண்டும் என்றிருந்தால், முதலில் தொகுதியிலுள்ள நபர்களுக்கு 1 முதல் 'N' வரையில் வரிசையெண் கொடுக்க வேண்டும். பின்னர் இயைபிலா எண்கள் கொண்ட புத்தகத்தில் ஏதாவது ஒரு பக்கத்தை எடுத்து, ஏதாவது ஒரு வரிசை யிலிருந்து ஆரம்பித்து Nஐ விடப் பெரியதாகத் தோன்றும் எண்களை ஒதுக்கிவிட்டு 'n' இயைபிலா எண்களை எடுக்க வேண்டும். பின்னர், தெரிந்தெடுத்த 'n' எதேச்சை எண் களுக்கு இணையான வரிசை எண்கள் கொண்ட உறுப்பினர் களடங்கிய சிறிய தொகுதி 'n' நபர்கள் கொண்ட மாதிரியாகும்.

தொடர் தொகுதி (Continuous Universe)

பீப்பாயிலுள்ள மாவு, கோணியில் உள்ள அரிசி என்பன போன்ற தொடர் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப் பதற்கு வேறு நுணுக்க முறைகளைக் கையாளவேண்டும். ஒரு முறை என்னவெனில், ஒரு மூட்டை அரிசியால் அமைந்த தொகுதியை ஒரே மாதிரி அளவுள்ள அநேக பொட்டலங் களாக அல்லது சிப்பங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும். பின்னர், பொட்டலங்களுக்கு வரிசை எண் கொடுத்து இயைபிலா மாதிரிப் பொட்டலங்களைத் தெரிந்தெடுக்கவேண்டும். சில வேளை களில், மாவு கலக்கப்பட்டு, இரு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படும. பின்னர் இவ்விரு பகுதிகளில், ஒரு பகுதி எதேச்சையாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு மீண்டும் இரு சம பாகங் களாகப் பிரிக்கப்படும். பின்னர், இவ்விரண்டு பாகங்களில் ஒன்று எதேச்சையாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும். இவ்வாறு பல முறை தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு நமக்குத் தேவையான உருவுடைய பொட்டலம் கிடைக்கும் வரையிலும் தொடர்ந்து பின்பற்ற வேண்டும்.

எடுகோள் தொகுதி (Hypothetical Population)

நாணயத்தைச் சுண்டுவது அல்லது பகடையை உருட்டுவது என்பன போன்ற கோட்பாட்டுத் தொகுதியிலிருந்து நமக்குத் தேவையான எண்ணிக்கைக்குச் சமமான தடவைகளில் நாணயத்தைச் சுண்டியோ அல்லது பகடையை உருட்டியோ கிடைக்கும் பலனை எதேச்சை மாதிரியாக எடுத்துக் கொள்ள லாம். என்றாலும், சோதனைக் காலங்களில் மாதிரி சூழ்நிலைகள் நிலையாக ஒன்றுபோல் இருக்குமாறு பார்த்துக் கொள்ள வேண்டும்.

தொகுதியில், உறுப்புகள் ஏகதேச ஒரே சீரான ஒருமைப் பாடு (Homogeneous) உடையதாக இருந்தால், இயைபிலா மாதிரி, தாய்த் தொகுதியைப் (Parent population) பற்றித் திருப்தி கரமான மதிப்பீட்டளவைக் குறிக்கும். ஆனால் தாய்த் தொகுதி பலதரப்பட்டதாகவும் (Hetrogeneous) மாதிரிகளின் நபர்களின் எண்ணிக்கை சிறியதாகவுமாக யிருந்தால், மாதிரி பெரும் பான்மையும் தொகுதியைக் குறித்துத் தவறான முடிவுகளையே தரும். மாதிரியின் அளவு அதிகரிக்குந் தோறும், அல்லது மாதிரி களின் அங்கத்தினர்களின் எண்ணிக்கை கூடுந்தோறும் எதேச்சை மாதிரி இதர மாதிரிகளைவிடவும் தொகுதியைக் குறித்து ஏறக்குறைய சரியான அளவைக் கொடுக்கும். பெரும்பான்மை இடங்களில் மாதிரி எடுப்பதன் நோக்கம், தொகுதியைப் பற்றி அறிவதே. எனவே, உள்நோக்கு மாதிரி (Purposive Sampling) எடுப்பதில் உள்ள குறை என்னவெனில் தொகுதியிலுள்ள குறிப் பிட்ட நபர் குறித்துச் சரியான விவரம் கிடைத்தபோதிலும், உறுப்பினர்களிடையே குணத்தில் தோன்றும் வேறுபாட்டின் ஆழத்தைக் குறித்துத் திருப்திகரமான விவரம் கிடைப்பதில்லை.

அநேக புள்ளியியல் ஆய்வுகளில் மேற்கூறிய இரு மாதிரி முறைகளின் இணைப்பு திருப்திகரமான பலனை அடைவதற்காக கையாளப்படும். தாய்த் தொகுதியின் அல்லது மூலத் தொகுதியின் அமைப்பு முறை உண்மையில் தெரிவதாக இருந்தால் இதை நிருபிக்கலாம்.

இயைபிலா மாதிரிகள் (Random Samples)

பல உறுப்பினர்கள் கொண்ட குழுவிலோ அல்லது தொகுதி யிலோ உள்ள ஒவ்வொரு நபருக்கும் தெரிந்தெடுக்கப்படுவதற்குச் சமவாய்ப்போ அல்லது சமச் சந்தர்ப்பமோ கொடுக்கப்பட்டால் அம்முறை எதேச்சை மாதிரி முறை எனப்படும். எதேச்சை

மாதிரியில் நிகழ் விதிக்கு ஏற்றமுறையில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுடைய நபர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவர்.

N நிலக்கூறுகள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து 'n' நிலக்கூறுகள் கொண்ட எதேச்சை மாதிரியை எடுக்க வேண்டியுள்ளதாக வைத்துக்கொள்வோம். முதல் நிலக்கூற்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது ஒவ்வொரு 'N' நிலக் கூற்றுக்கும், சமவாய்ப்பு அளிப்பதாக எதேச்சை மாதிரி முறை அமைந்திருக்கும். முதல் கூற்றைத் தேர்ந்தெடுத்தபின்பு எஞ்சியுள்ள (N—1) என்ற தொகுதியிலிருந்து 2வது நிலக்கூற்றைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். நமக்குத் தேவையான எண்ணிக்கை கொண்ட நிலக்கூறுகள் வரும் வரையில் இம்முறையைத் தொடரவேண்டும். இம்முறையில் மாதிரிகளைத் தெரிந்தெடுப்பது, மீண்டும் வரா மாதிரி முறை (Sampling without replacement) எனப்படும். N நபர்கள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து 'n' நபர்கள் கொண்ட ஒரு பகுதி அல்லது மாதிரி, ${}_NC_n$ முறைகளில் ஒன்றாக இருக்கும். நமது மாதிரித் தேர்ந்தெடுப்பு முறை ஒவ்வொரு நபருக்கும் சமவாய்ப்பு அளிக்கும் முறையில் இருந்தால் அதுவே எதேச்சை மாதிரி கிடைப்பதற்கு ஒப்பாகும்.

மீண்டும் வரும் மற்றும் மீண்டும் வரா மாதிரிகள் (Sampling with or without replacement)

மீண்டும் வரா மாதிரி முறை

'N' நபர்கள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து 'n' நபர்கள் கொண்ட பகுதியை இரு வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். தொகுதியிலிருந்து ஒரு மாதிரி நபரைத் தேர்ந்தெடுத்த பின்னர் அடுத்த நபரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு முன்னர், முதலில் தேர்ந்தெடுத்த நபரை அகற்றிவிடலாம். இவ்வாறு 'n' வெவ்வேறு நபர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பது வரையிலும் தொடர்ந்து செல்லலாம். இத்தகைய முறையே மீண்டும் வரா மாதிரி முறை எனப்படும்.

மீண்டும் வரும் மாதிரி முறை

முன் கூறியமுறைக்கு மாறாக. தொகுதியிலிருந்து ஒரு நபரைத் தேர்ந்தெடுத்த பின்னர் மீண்டும் அதே நபரைத் தொகுதியில் சேர்த்துப் பின்னர் நபரைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இம்முறையை நமக்குத் தேவையான எண்ணிக்கை கொண்ட மாதிரி கிடைக்கும் வரையில் தொடர்ந்து பின்பற்றலாம். இம்முறையில் ஒரு குறிப்பிட்ட நபர், ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பல

முறை வருவதற்கு வாய்ப்புண்டு. அப்போது ஒரு நபர் எத்தனை முறை தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறாரோ அத்தனை முறையும் அந்நபரின் மதிப்பு மீண்டும் மீண்டும் கணக்கிலடங்கும். எனவே 'N' நபர்கள் கொண்ட பகுதியில் 'n' அல்லது 'n' க்குக் குறைவான வெவ்வேறு நபர்கள் இருக்கமுடியும்.

சராசரி மதிப்பு—எதிர் பார்ப்பும் பழுதற்ற மதிப்பீடுகளும் (Mean Value—Expectation and Unbiased Estimates)

ஓர் எளிய எதேச்சை மாதிரி அல்லது நிகழ்திறன் மாதிரிகளின் (Probability Sampling) எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் ஆய்வு செய்தால் இச்சொற்றொடர்களின் பொருள் நன்கு விளங்கும். 'n' நபர்கள் கொண்ட எதேச்சை மாதிரிகளை எடுத்தால், இந்த n' நபர்களின் மதிப்பிற்குச் சராசரியும், மூல விலக்கமும் காணலாம். இவைகள் மாதிரிப் புள்ளிகள் (Sample Statistic) எனப்படும். இவ் அளவுகள் 'N' நபர்கள் கொண்ட தொகுதியின் சராசரியையும் மூல விலக்கத்தையும் பிரதிபலிக்கும் அளவாகவே இருக்கும். என்றாலும், 'n' நபர்கள் கொண்ட வேறு ஒரு மாதிரியையும் எடுத்தால் அம்மாதிரி அதே அளவு சராசரியையும் மூல விலக்கத்தையும் கொடுக்காது.

'N' நபர்கள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து 'n' நபர்கள் கொண்டு முடிந்த எல்லா மாதிரிகளையும் எடுப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். இங்கு பின்பற்றிய முறையை 'மீண்டும் வரா முறை' எனக் கருதுவோம். முடிந்த எல்லா மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை ${}_NC_n$ ஆகும். நாம் 'n' நபர்கள் கொண்ட ஏதாவது ஒரு மாதிரியை எடுத்தால் அது ${}_NC_n$ மாதிரிகளில் ஒன்றாக இருக்கும்.

எடுக்கப்பட்ட மாதிரி i எனவும், அதன் மாதிரி சராசரி $\bar{x}_i$ எனவும் குறிப்பிடுவோம். இம்மாதிரியைத் தெரிந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்திறன் p_i ஆக இருக்கட்டும். இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

மாதிரியின் வரிசை எண்	சராசரி	நிகழ்திறன்
1	$\bar{x}_1$	p_1
2	$\bar{x}_2$	p_2
3	$\bar{x}_3$	p_3

மாதிரியின் வரிசை எண்	சராசரி	நிகழ்திறன்
i	$\bar{x}_i$	p_i
(i + 1)	$\bar{x}_{(i+1)}$	$p_{(i+1)}$
Last $_NC_n$	$\bar{x}\ (_NC_n)$	$p\ (_NC_n)$

எல்லா மாதிரி சராசரிகளின் எதிர்பார்க்கப்படும் பொது சராசரி $\bar{x}$ ஆக இருக்கட்டும். இது தொகுதியின் சாராசரிக்குச் சமமாக இருக்கும். இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்;

$$E(\bar{x}) = \frac{\Sigma x_i\ p_i}{\Sigma\ p_i}$$

$\Sigma p_i = 1$. ஏனென்றால், எல்லா நிகழ்திறன்களின் கூட்டுப் பலன் 1. எனவே, இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்:

$$E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{_NC_n} \bar{x}_i\ p_i$$

மாதிரியின் ஒரு புள்ளியியல் அளவின் எதிர்பார்க்கப்படும் அளவு அதற்கு இணையான தொகுதியின் புள்ளியியல் அளவுக்குச் சமமாக இருந்தால் மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவு தொகுதியின் புள்ளியியல் அளவின் பழுதற்ற மதிப்பு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

5 நபர்கள் கொண்ட ஒரு தொகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். அவர்களின் அளவு கீழ் வருமாறு:

50. 37, 26, 2, 0.

$$\text{அவர்களின் சராசரி} = \frac{50+37+26+2+0}{5} = \frac{115}{5} = 23$$

எல்லா நபர்களை எடுப்பதற்குப் பதிலாக மீண்டும் வரா இரண்டு நபர்கள் கொண்ட மாதிரிகளை எடுப்போம் பின்னர் அம்மாதிரிகளுக்கான சராசரி அளவுகளைக் கணிப்போம். இங்கு மொத்தம் $_5C_2$ மாதிரிகள் கிடைக்கும்.

$$_5C_2 = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10 \text{ மாதிரிகள்.}$$

இரண்டு நபர்கள் கொண்ட பத்து மாதிரிகளும் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கும் :

வரிசை எண்	முதல் நபரின் அளவு	2-வது நபரின் அளவு	சராசரி $\bar{x}$	$\bar{x}^2$
1	50	37	43.5	1892.25
2	50	26	38.0	1444.00
3	50	2	26.0	676.00
4	50	0	25.0	625.00
5	37	26	31.5	992.25
6	37	2	19.5	380.25
7	37	0	18.5	342.25
8	26	2	14.0	196.00
9	26	0	13.0	169.00
10	2	0	1.0	1.00
மொத்தம்			230.00	6718.00

சராசரி 23

முடிந்த எல்லா மாதிரிகளின் சராசரி 5 நபர்கள் கொண்ட தொகுதியின் சராசரிக்குச் சமமாக இருப்பதைக் காணலாம். எனவே, எதேச்சை மாதிரியின் சராசரி, தொகுதியின் சராசரியின் பழுதற்ற மதிப்பீடாகும் என்றாலும், மாதிரியின் புள்ளியியல் அளவு தொகுதியின் புள்ளியியல் அளவின் பழுதற்ற மதிப்பீடா அல்லவா என்பது எத்தகைய மாதிரி முறைகளைக் கையாண்டோம் என்பதையும், விவரங்களையும் பொறுத்தேயிருக்கும்.

இயைபிலா மாதிரி விலக்கம் (Random Sampling Error)

(இப்பகுதி சற்று உயர்ந்த நிலைப்பகுதி)

($\bar{x}$) என்ற 'N' நபர்கள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து மீண்டும் வரா முறையில் எடுத்த 'n' நபர்கள் கொண்ட மாதிரியின் சராசரி, நிகழ்திறன் மாதிரிமூலம் கணிக்கப்பெற்ற

மாதிரி புள்ளியின் பழுதற்ற மதிப்பீடுகள் என்று கண்டோம். எனவே இது தொகுதியின் சராசரியிலிருந்து வேறுபடலாம். ' n ' நபர்கள் கொண்ட வெவ்வேறு மாதிரிகள் வெவ்வேறு அளவுடைய சராசரிகளைக் கொடுக்கலாம். என்றாலும் எல்லா மாதிரிகளின் சராசரிகளும், தொகுதியின் எதிர்பார்க்கப்படும் சராசரியான $E(\bar{x})$ க்குச் சமமாகயிருக்கும். மாதிரிகளின் சராசரி களிடையே வேறுபாடு தோன்றக் காரணம், நாம் தொகுதியில் உள்ள எல்லா நபர்களை எடுக்காது ' n ' நபர்கள் கொண்ட மாதிரியை எடுத்ததே எனக் கூறவேண்டும்.

இத்தகைய மாதிரிப் புள்ளிகளின் அளவுகளிடையே காணப் படும் வேற்றுமை, விலக்கம் எனப்படும். இது பொதுவாக எல்லா மாதிரிகளிலிருந்து கிடைக்கப்பெற்ற புள்ளிகளின் மூல விலக்கமாகும். இதுவே புள்ளியின் மூலக் குறை எனப்படும். இது S.E. (Standard Error) எனக் குறிப்பிடப்படும். முன் உள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்தும் காணலாம்.

இங்கு $\bar{x}$ பொது சராசரி = 23.

$$S.E.(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\Sigma \bar{x}^2}{N} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{6718}{10} - 529} = \sqrt{\frac{1428}{10}}$$

$$= \sqrt{142.8} = 11.95$$

மாதிரிகளின் சராசரிகளின் சராசரியும் தொகுதியின் சராசரியும் ஒன்று என்று முன்பு கூறியதிலிருந்து கண்டோம். சராசரிகளின் மூலவிலக்கம் தொகுதியின் மூலவிலக்கத்திற்குச் சமமாக உளதா என்று பார்ப்போம். மாதிரிகளின் சராசரிகளின் மூலவிலக்கம் 11.95 என்று கண்டோம். தொகுதியின் மூலவிலக்கம் காண்போம்.

தொகுதியின் அளவு :	உறுப்பினர்
x	x^2
50	2509
37	1369

தொகுதியின் உறுப்பினர்

அளவு x	x^2
26	676
2	4
0	0
511	4549

$$\bar{x} = \frac{115}{5} = 23. \quad \bar{x}^2 = 529$$

$$x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4549}{5} - 529} = \sqrt{\frac{4549 - 2645}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{1904}{5}} = 19.51$$

தொகுதியின் சராசரியையும் மாதிரியின் சராசரியையும் அட்டவணைப்படுத்துவோம் :

		சாரசரி	மூலவிலக்கம்
தொகுதி	...	23	19.51
மாதிரி	...	23	11.95

இரண்டிலும் சராசரி சமமாகயிருந்தபோதிலும் மூலவிலக்கம் சமமாகயில்லை. தொகுதியின் மூலவிலக்கத்திற்கும் மாதிரியின் சராசரி மூலவிலக்கத்திற்குமுள்ள அதிசயத் தொடர்பைக் காண்போம். இங்கு மாதிரியின் அளவு 2 (n). கீழேயுள்ள தொடர்பு நிருபணம் ஆவதைக் காணலாம்:

மாதிரியின் சராசரியின் மூலவிலக்கம்

$$= \frac{\text{தொகுதியின் மூலவிலக்கம்}}{\sqrt{\text{மாதிரியின் அளவு}}}$$

$$= \frac{19.51}{\sqrt{2}} = \frac{19.51}{1.41}$$

$= 13.9$ அல்லது 14

நமக்கு ஏற்கனவே கிடைத்த அளவு 11.95 அல்லது 12. இங்கு தோன்றும் வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கது. ஆனால் இங்கு மாதிரியின் அளவும் தொகுதியின் அளவும் மிகக் குறைவாக யிருப்பதால் இத்தகைய குறிப்பிடத்தகும் வேறுபாடு காணப் படுகிறது. எனவே கீழே கொடுத்துள்ள சமன்பாடு ஏற்புடைத்த தாகிறது.

$$S.E\ (\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

இங்கு σ = தொகுதியின் மூலவிலக்கம்

n = மாதிரியின் அளவு

சரியான மாதிரிக் கூறு முறை இன்றேல் நேரும் பிழைகள் (Non-Sampling errors)

மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குச் சரியான எதேச்சை முறைகளைப் பின்பற்றவேண்டும் என முன்பு கூறப்பட்டது. ஏனோதானோ என்ற முறையில் மாதிரிகள் இருந்தால் கிடைக்கும் பயன்கள் ஓரமுடைத்தாகும். குறைகள் நேருவதற்கும் வாய்ப்பு உண்டு. இத்தகைய பிழைகள் சரியான மாதிரி முறை இல்லாப் பிழைகள் எனப்படும். இத்தகைய பிழைகளுக்குப் பல காரணங்கள் உளதால் அவைகளைத் தவிர்க்க முன் எச்சரிக்கை எடுக்கலாம்.

மாதிரி முறை இல்லையேல் எழும் பிழைகளுக்கான சூழ்நிலைகள்

இத்தகைய பிழைகள் உண்டாவதற்கான காரணங்கள் கீழ் வருமாறு :

1. மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறை நிகழ்திறன் தத்துவத்திலிருந்து விலகிச் சென்றால் குறை எழுவதற்கு ஏதுவாகும்.

2. மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் தெரிந்தோ தெரி யாமலோ நேரும் விருப்பு வெறுப்பு, பழுதான மதிப் பீட்டைத் தரலாம். ஆகவே மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப் பதைக் களப்பணியாளர்களிடம், அதிலும் அதற்கென வுள்ள நியதி முறைகளுடன் கொடுக்கலாம். நன்கு பயிற்சி பெற்றவர்களால், தலைமையிடத்தில் தெரிந் தெடுப்பதன் மூலம் இக் குறையைத் தவிர்க்கலாம்.

3. தொகுதியின் அரைகுறைப் பட்டியலாலும் குறை எழலாம். இத்தகைய அரைகுறைப் பட்டியலிலிருந்து மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது, அது தொகுதியின் ஒரு பிரிவினரை மட்டும் சார்ந்ததாகயிருக்கும். அந் நிலையில் நமது மதிப்பீடும் தொகுதியின் அப் பிரிவின ருக்குரியதாக மட்டுமே இருக்கும். இம் மதிப்பீட்டை முழுத் தொகுதிக்கும் உரியதாக்கினால் குறை எழ ஏது வாகும். பட்டியலின் குறைகளாலோ, அல்லது முன்பு எப்போதோ உள்ள நபர்களைப் பட்டியலில் சேர்ப்ப தாலோ இவை போன்ற மதிப்பீட்டில் குறை நேரலாம்.

4. நடைமுறை சிரமம் காரணமாகச் சில நபர்களிடமிருந்து விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் தொல்லைகள் இருக்க லாம். உதாரணமாகக் களப்பணியாளர் செல்லுகின்ற போது, விவரம் கொடுப்போர் குறிப்பிட்ட முகவரி யில் இல்லாது போகலாம். சில விவரங்களையோ அல்லது எல்லா விவரங்களையோ அவர்கள் கொடுக்க மறுக்கலாம். வயல்களைக் குறித்த விவரங்கள் சேக ரிக்கும்போது குறிப்பிட்ட வயல் வெள்ளப் பெருக்கால் மூழ்கி இருக்கலாம். இயைபிலா முறையில் தேர்ந் தெடுத்த மாதிரிகளைத் தவிர்ப்பதாலும் குறைகள் வர லாம். இது தொகுதியின் ஒரு பகுதியின் மதிப்பீட்டையே தருவதாகும். எந்த விதமான காரணங்களாலும் எதேச்சை முறையில் தேர்ந்தெடுத்த நபர்களை ஒதுக்கு வதால் எழும் குறைகள் பதிலில்லாப் பிழைகள் (Error of non-response) எனப்படும்.

5. களப்பணியாளர் தேர்ந்தெடுத்த நபரிடமிருந்து விவரங் களைச் சேகரிப்பதில் சில சமயம் நேரிடும் சிரமத்தால் வசதியை முன்னிட்டு வேறு நபரை அதற்காக ஈடு செய்யலாம். இதனாலும் முன்கூறிய அதே குறை எழ ஏதுவாகும்.

6. பொருத்தமில்லாத காலத்தில் நடத்தப்பெறும் ஆய்வு களாலும் குறை ஏற்படலாம்; நாம் எதிர்பார்க்கின்ற சரியான மதிப்பீடு கிடைக்காது போகலாம்.

7. தேவையான விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்குப் போதுமான வினாக்கள் வினாப்பட்டியலில் இல்லாதிருக் கலாம். பட்டியலிலுள்ள வினாக்களுக்கு விடை பெறுவது சிரமமாகயிருக்கலாம். வினாக்கள் பலவாறு

விடையிறுக்கும் நிலையில் தெளிவில்லாதிருக்கலாம். வினாக்களின் வரிசை முறையும் அமைப்பும் முக்கியமானது. வினாக்களின் பொருத்தமில்லாத முறை, பொருத்தமில்லா அமைப்பு, பொருத்த மற்ற சொற்றொடர்களும் குறை உண்டுபண்ணலாம்.

8. விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறையும் முக்கியமானதே. வெவ்வேறு சூழ்நிலைகளுக்கு வெவ்வேறு முறைகள் பொருத்தமாக இருக்கலாம் அதிக எழுத்தறிவில்லாத இந்தியா போன்ற நாடுகளில் வினாப் பட்டியலைத் தபால் மூலம் அனுப்பி விவரங்களைச் சேகரிப்பது பொருத்தமில்லாதிருக்கலாம். இம் முறையைப் பயன்படுத்தும்போது, பதிலில்லாக் குறை அதிக அளவில் இருக்கும்

9. பழுதான அறிவுரை விளக்கங்களாலும் குறை நேரலாம்.

10. விவரங்களைக் கொடுப்பதில் நேரும் எதிர்பாராத சந்தர்ப்பங்களாலும் நினைவுத் தவறுவதாலும், போதுமான ஆதாரங்கள் இல்லாததாலும் சரியான விவரங்களைக் கொடுக்க மனமில்லாக் காரணத்தாலும் தானாகவோ அல்லது எதிர்பாராமலோ பிழைகள் ஏற்படலாம்.

11. பழுதான மற்றும் பொருத்தமற்ற கருவிகளைப் பயன்படுத்துவதாலும் குறைகள் வரலாம்.

12. களப்பணியாளர், வினாக்களையும் விவரங்களையும் புரிந்து கொள்வதிலும், விவரங்களைக் குறிப்பதிலும், தவறுகள் வரலாம்.

13. கவனமற்ற மற்றும் ஒழுங்கற்ற களப்பணி முறைகளாலும் குறைகள் வரலாம்.

14. விவரங்களைத் தெரிவிக்கும்போதும், விளக்கும்போதும் பொருத்தமான முறைகளைப் பின்பற்றாத காரணத்தால் குறைகள் வரலாம்.

15. மேற்கூறிய காரணங்களால் நேரும் குறைகளை, ஆய்வைத் திட்டமிடும்போதும், செயல்படுத்தும்போதும் நினைவுறுத்திக் கொண்டால் தவிர்க்கலாம். இத்தகைய காரணங்களால் நேரும் குறைகளின் அளவை முன்னோடி ஆய்வுகள் மூலம் அறிய வாய்ப்புண்டு.

பலவிதக் காரணங்களால் எழும் இத்தகைய குறைகள் ஒன்றையொன்று சரிக்கட்டும் அல்லது நேர் செய்யும் நிலையிலிருந்தால் சராசரி போன்ற அளவில் கடைசியில் தோன்றும் நிகரக் குறை சிறிதளவேயிருக்கும். ஆனால் இதுகுறித்து எப்போதும் உறுதியாக யிருக்கமுடியாது. இத்தகைய காரணங்களால் எழும் குறை ஒருதலைப் பட்டதாகயிருந்தால், மாதிரிகளின் அடிப்படையில் உருவாகும் மதிப்பீடு உண்மையை விட்டு அதிக அளவில் வேறுபடும். ஆனால் பலவித காரணங்களால் நேரும் குறைகளின் அளவு ஒன்றை ஒன்று நேர் செய்து சரிக்கட்டினும் அல்லது சரிக்கட்டாதிருந்தாலும் மூல விலக்கத்தின் அளவுகளில் உண்டாகும் பாதிப்பு அதிக மாயிருக்கும். இக்குறைகள் மூலவிலக்கத்தின் அல்லது மூலக்குறையை அதிகமாகக் காண்பிக்கும். அதனால் நம்பக எல்லையின் அளவும் விரிந்து இருக்கும். மாதிரியிலிருந்து கிடைக்கும் விவரத்தை ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டும் என்றால் நாம் மூலக்குறையின் மதிப்பைக் குறைப்பதில் கருத்துள்ளவர்களாகயிருக்கவேண்டும். எனவே ஆய்வுகளைத் திட்டமிடும்போதும் செயல் படுத்தும்போதும் கூறுமுறையின்றேல் நேரும் குறை களில் அதிகக் கவனம் செலுத்துவது முக்கியமான தாகும்.

பயிற்சி

1. மாதிரி ஆய்வுகள் பற்றி விளக்குக. முழுக் கணிப்பு முறையைவிட மாதிரி ஆய்வுகளின் நன்மைகள் என்ன?

2. கீழ்க் கண்டவற்றை விளக்குக.

   (1) மாதிரிகள் பட்டியல்

   (2) மூலக்குறை

   (3) சரியான மாதிரி முறை இன்றேல் நேரும் குறைகள்

   (4) எதேச்சை எண்

   (5) மாதிரிப் புள்ளி

3. சரியான மாதிரி முறை இன்றேல் நேரும் குறைகள் பற்றியும் மற்றும் அதற்கான காரணங்களையும் விளக்குக.

4. புள்ளியியலில் சரியான மாதிரி இன்றேல் நேரும் குறைகள் பற்றி ஒரு கட்டுரை வரைக,

அத்தியாயம் 3

மாதிரி முறைக் கொள்கைகள்
(Theory of Sampling)

மாதிரி முறையின் கொள்கை

மாதிரி முறைக் கோட்பாடு முக்கியமாக இரண்டு தத்துவங்களின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது.

1. புள்ளியியல் ஒழுங்கு முறை விதி
2. எண்ணிக்கை அதிகரித்தால் வேறுபாடிருக்காது.

புள்ளியியல் ஒழுங்கு முறை விதி (Law of Statistical Regularity)

உலகில் உள்ள எல்லாப் பொருள்களும் ஒரு நியதியின் வழியே இயங்கும். இது புள்ளியியலின் ஒழுங்கு முறை விதியின் பிரதிபலிப்பேயன்றி வேறில்லை. ஒரு மாதிரி என்பது தொகுதியின் எல்லா குணங்களிலும் மறுபடியாகும் என்ற விளக்கத்தையே புள்ளியியல் ஒழுங்கு முறை தருவதாகும்.

எண்ணிக்கை ஏறின் வேறுபாடு இறங்கும் (Law of inertia of large numbers)

நபர்களிடையே வேறுபாடு தோன்றினும், அதிக நபர்களைக் கவனிக்கும்போது வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கவாறு இராது. நபர்களிடையே உள்ள வேறுபாடு நேராகவும் எதிராகவும் இருக்கலாம். ஆனால் அதிக நபர்களைக் கவனிக்கும்போது, நேர் மற்றும் எதிர் வேறுபாடுகள் தம்மில் நேர் செய்வதால் வேறுபாடில்லாதுபோல் தோன்றும். அப்போது தனிப்பட்ட நபர்களிடையேயுள்ள வேறுபாடு மறைந்துவிடும். எண்ணிக்கை மிகில் மாற்றங்கள் மந்த வேகத்தில் செல்லும்.

மாதிரிகளின் பரவல் (Sampling Distribution)

தொகுதியில் உள்ள உறுப்பினர்கள் ஒவ்வொருவரின் விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் காலம், பொருள், ஆள்பலம் அதிகம் தேவைப்படும் என்பது தெரிந்ததே. இத்தகைய ஏதுக்களால்

புள்ளியியல் ஆய்வாளர் பெரும்பான்மையும் மாதிரிகளைக் கையாளுகின்றனர். இம் முறையில் ஒரு சில உறுப்பினர்களை மாத்திரம் தேர்ந்தெடுத்து, அவர்களைப் பற்றிப் படித்துப் பின்னர் அவ் விவரங்களைத் தொகுதியின் பிரதிநிதித்துவ விவரங்களாக எடுத்துக்கொள்வர்.

மாதிரி (Sample)

தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு சில நபர்கள் கொண்ட குழு 'மாதிரி' எனப்படும். மேலும் இத்தகைய மாதிரியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் அல்லது நபரும் 'மாதிரி உறுப்பு' (Sampling Unit) எனப்படும். மாதிரியில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை பொதுவாக மாதிரியின் அளவு அல்லது பருமன் (Size of the sample) எனப்படும். சில வேளைகளில் மாதிரியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புமே மாதிரி எனப்படலாம்.

எதேச்சை மாதிரிகள் (Random samples)

தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகளைத் தெரிந்தெடுப்பதே புள்ளியியலில் 'மாதிரித் தேர்வு முறை' என்ற ஒரு தனிப்பிரிவாகும். பொதுவாக மாதிரிகளைத் தெரிந்தெடுப்பதில் தனி நபர்களின் விருப்பு, வெறுப்புகளைத் தவிர்ப்பதற்காக எதேச்சை எண்கள் உதவி கொண்டு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் மாதிரிகள் எதேச்சை மாதிரிகள் என்றும் இத்தகையத் தேர்வு எதேச்சை மாதிரித் தேர்வு எனவும் கருதப்படும்.

புள்ளியியல் அளவு அல்லது புதுபுள்ளி (Statistic)

மாதிரிகளிலிருந்து கணிக்கப்பெறும் சராசரி மற்றும் மூலவிலக்கம் போன்ற புள்ளியியல் அளவுகள், புள்ளியியல் அளவு எனப்படும். நமக்குத் தேவையான அளவுகள் கொண்ட மாதிரியிலிருந்து சராசரியைக் கணிக்கலாம். பின்னர் அதே அளவு கொண்ட வேறு ஒரு மாதிரியை எடுத்தாலும், முன்போல் அதற்கும் சராசரி கணிக்கலாம். இவ்வாறு சம எண்ணிக்கை கொண்ட வெவ்வேறு மாதிரிகளிலிருந்து கணித்த ஒவ்வொரு சராசரி மதிப்பும் தம்மில் வேறுபடும். ஏனெனில் ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் அதே நபர்களே இருப்பதில்லை. இம் முறையில் எத்தனை மாதிரிகள் எடுக்கின்றோமோ அத்தனை சராசரிகளையும் கணிக்கலாம்.

புதுபுள்ளியின் பரவல் (Sampling Distribution of Statistic)

ஒவ்வொரு மாதிரியின் சராசரியும் தொகுதியின் சராசரியின் மதிப்பீடாக இருந்தபோதிலும், மாதிரிகளின் சராசரிகளின்

சராசரி தொகுதியின் சராசரிக்குச் சமமாகும். தொகுதியின் நபர்களுக்கு ஒரு பரவல் அமைப்பதுபோல் மாதிரிகளிலிருந்து கணிக்கக்பெறும் சராசரி, மற்றும் மூலவிலக்கம் போன்ற புதுப் புள்ளிகளுக்கும் ஒரு பரவல் அமைக்கலாம். இத்தகைய புள்ளிகளுக்கான பரவல், புள்ளிகளின் மாதிரிப் பரவல் எனப்படும். சராசரிகளின் சராசரி, தொகுதியின் சராசரிக்குச் சமமாக இருப்பதால், மாதிரியின் அளவு அல்லது பருமன் அதிகரிக்குந்தோறும் அல்லது தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சாத்தியமான எல்லா மாதிரிகளையும் தேர்ந்தெடுக்கும்போதும் எவ்விதப் புள்ளிகளின் சராசரி அளவும் தொகுதியின் அதற்கிணையான புள்ளியியல் அளவுகளுக்குச் சமமாக இருக்கும் என்று எதிர்பார்க்கலாம். தொகுதியின் பரவல் இயல்பாக (Normal) இல்லாதபோதும், அதிக மாதிரிகளை எடுத்தால், அம்மாதிரிகளின் சராசரிகளின் பரவல் இயல்பாக இருக்கும். இந்நிலையில் சராசரிகளின் சராசரி தொகுதியின் சராசரிக்குச் சமமாகவும், சராசரியின் மூலவிலக்கம் $\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ என்ற அளவிற்குச் சமமாகவும் இருக்கும். இங்கு σ என்று குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது தொகுதியின் மூலவிலக்கம். 'n' என்பது மாதிரியின் அளவு அல்லது பருமனாகும்.

மூலக்குறை அல்லது தரப்பிழை (Standard Error)

எந்த விதமான மாதிரி புள்ளியியல் அளவுகளின் சராசரி, பொதுவாக தொகுதியில் அதற்கிணையான அளவிற்குச் சமமாகயிருக்கும் என்று கூறக் கண்டோம். இக்கூற்று, சராசரியைப் பொறுத்தவளவில் சரியானதாகயிருந்த போதிலும், மூலவிலக்கத்தைப் பொறுத்தவரை இக்கூற்று சரியன்று. மாதிரியிலிருந்து கணித்த சராசரியின் மூலவிலக்கம் அல்லது மாதிரிப் பரவலின் மூலவிலக்கம், மூலக்குறை அல்லது தரப்பிழை எனப்படும். $\bar{x}$ என்ற சராசரியின் மூலக்குறை $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்ற அளவிற்குச் சமமாயிருக்கும்.

$$\text{சராசரியின் மூலவிலக்கம்} = \frac{\text{தொகுதியின் மூலவிலக்கம்}}{\sqrt{\text{மாதிரியின் அளவு}}}$$

$$\text{மூலக்குறை} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

இங்கு σ = தொகுதியின் மூலவிலக்கம்

n = மாதிரியின் பருமன் அல்லது மாதிரியின் அளவு அல்லது மாதிரியின் நபர்களின் எண்ணிக்கை

இச் சமன்பாட்டை எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். 'n' நபர்கள் கொண்ட மாதிரிகள் எடுக்கும்போது, நபர்களிடையேயுள்ள அதே அளவு வேறுபாடு மாதிரிகளின் சராசரிகளிடையே காணப்படுவதில்லை. ஒவ்வொரு மாதிரிகளுக்கும் இதே நிலையே தோன்றும். பல மாதிரிகளின் சராசரியிடையே உள்ள வேறுபாடு தொகுதியில் உள்ள நபர்களிடையே அல்லது மாதிரிகளின் நபர்களிடையே தோன்றும் அதே அளவு வேறுபாடு போல் இராது. மாறாக, சராசரிகளின் வேறுபாடு தொகுதியின் நபர்களின் வேறுபாட்டின் $\frac{1}{n}$ பாகமாக மாறும். மாதிரிகளின் பருமன் 'n' என்று இருப்பதால் மாதிரிகளின் 'n' நபர்களின் மொத்த அளவு 'n' கொண்டு வகுக்கப்பெற்றுச் சராசரி கணிப்பதால் இந்நிலை உருவாகிறது. இதுபோன்று மாதிரியின் சராசரியின் வர்க்கமும் (Variance) தொகுதியின் நபர்களின் அல்லது மாதிரியின் நபர்களின் வர்க்கத்தின் $\frac{1}{n}$ பாகமாகவே இருக்கும். ஏனெனில் மாதிரியின் வர்க்கம் தொகுதியின் வர்க்கத்தின் மதிப்பீடாகும்.

எனவே $\bar{x}$ ன் வர்க்கம் $= \dfrac{\text{தொகுதியின் வர்க்கம்}}{n}$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

மூலக்குறை எனப்படும் சராசரியின் மூலவிலக்கம் $\sigma/\sqrt{n}$ என்று மாறும்; ஏனெனில் மூலவிலக்கம் என்பது வர்க்கத்தின் மூலமே.

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$S.D\ (\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

மூலக்குறையின் மதிப்பைக் குறைக்க வேண்டுமானால் மாதிரியின் பருமன் அளவான 'n' ஐ அதிகரிக்க வேண்டும்.

எனவே மூலக்குறை என்பது மாதிரியின் பருமனளவின் வர்க்க மூலத்திற்கு எதிர் விகிதத்தில் அமைந்திருக்கும்.

மாதிரிகளின் மதிப்பீட்டளவின் எதிர்பார்ப்பு

சராசரிக்குக் கூறிய அதே கூற்றே விகிதத்திற்கும் (Proportion) பொருந்தும்; ஏனெனில் சராசரியும் மற்றும் விகிதமும் மொத்தத்திலிருந்து Σx கணிக்கப்படுகிறது.

1. மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை அல்லது மாதிரிகளின் சராசரிகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்குந்தோறும், மாதிரிகளின் சராசரிகளின் சராசரி தொகுதியின் சராசரியை நோக்கியே செல்லும்

2. மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்குந்தோறும், மாதிரிகளின் உதவியால் கணிக்கப்பெற்ற ஒரு குணத்தின் விகித அளவு, தொகுதியின் அக்குணத்திற்கான விகித அளவை நோக்கியே செல்லும்.

3. மாதிரிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை, தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பெறும் எல்லாவித மாதிரிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகயிருந்தால், கீழேயுள்ள நிலை ஏற்படும்.

(அ) மாதிரிகளின் சராசரிகளின் சராசரி, தொகுதியின் சராசரிக்குச் சமமாகயிருக்கும்.

(ஆ) மாதிரிகளின் விகிதங்களின் சராசரி தொகுதியின் விகிதத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்.

இதைக் கணித மொழியில், சராசரியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு அல்லது விகிதத்தின் எதிர்பார்க்கும் அளவு, முறையே தொகுதியின் சராசரிக்கும், தொகுதியின் விகிதத்திற்கும் சரியாகயிருக்கும் எனவும் கூறலாம்; இக்கூற்று கீழ் வரும் சமன்பாட்டால் விளக்கப்படும்.

(1) $E(m) = u$, (2) $E(P) = P$

இங்கு 'E' என்பது எதிர்பார்ப்பளவு என்பதையும், U தொகுதியின் சராசரியையும், P தொகுதியின் விகிதத்தையும் குறிப்பதாகும்.

மேலேயுள்ள கூற்று பொருந்தாதபொழுது, அல்லது சராசரியிலிருந்து கிடைத்த எதிர்பார்க்கும் அளவு தொகுதியின்

அளவிற்குச் சமமில்லாதிருந்தால் மாதிரியின் மதிப்பீடு ஓர் மூடைத்து, பழுதுடைத்து (Biased) எனக் கூறலாம்.

பலவிதப் புள்ளியியல் அளவுகளின் மூலக் குறை எவ்வாறு கணிக்கப் பெறுகிறது என்பதைப் பார்ப்போம்:

1. **மாதிரிகளின் சராசரிகளின் மூலக்குறை** (Standard Error of Sample Means)

மாதிரியின் பருமனளவு அதிகரிக்குந்தோறும், ஒரே பருமனளவு கொண்ட பல்வேறு மாதிரிகள் எடுத்தபோதும் மாதிரிகளின் சராசரியளவு தொகுதியின் சராசரிக்குச் சமமாக யிருக்காது. ஆனால் அவை தொகுதியின் சராசரியளவை நோக்கியே செல்லும். மாதிரிகளின் சராசரிகளுக்குச் சராசரியும் மூலவிலக்கமும் கணிக்கலாம். சராசரிகளின் சராசரி தொகுதியில் சராசரியுடன் இணைந்தும், மாதிரிகளின் சராசரிகளின் மூலவிலக்கத்தின் அளவு மாதிரிகளின் பருமன் அதிகரிக்குந்தோறும் குறைந்தும் காணப்படும்.

எதேச்சை மாதிரிகளின் சராசரிகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு தொகுதியின் மூலவிலக்கத்தோடு, கணித உறவு உடையதாக யிருக்கும். ‘ m ’ என்ற சராசரியின் மூலவிலக்கம்

$$= \frac{\text{தொகுதியின் மூலவிலக்கம்}}{\sqrt{n}}$$

இங்கு ‘n’ = மாதிரியின் அளவு.

மாதிரியின் விலக்க வர்க்கம் (Sampling Variance)

மாதிரிகளின் சராசரிகளின் மூலவிலக்கம் மூலக்குறை எனப்படும். மூலக் குறையின் வர்க்கம் அல்லது சராசரியின் வர்க்கம் (Variance) சராசரியின் மாதிரி வர்க்கம் எனப்படும்.

நம்பக எல்லைகள் (Confidence Limits)

எதேச்சை மாதிரி முறையின் முக்கியமான பண்பு என்னவெனில் தொகுதியில் உள்ள நபர்கள் சரியான அல்லது ஏறக்குறைய சரியான இயற் பரவல் (Normal) முறையிலிருந்தாலும், இயைபிலா மாதிரிகளின் பரவல் பொது மரபில்தானிருக்கும். இக்குணத்திலிருந்து இயல் நிகழ்திறன் அட்டவணையின் மூலம் (Normal probability integral) மாதிரிகளின் ஒரு குறிப்பிட்ட விகித அளவு, சராசரிகள் அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட சராசரிகள் எந்த எல்லை அளவுகளிடையே

அமைந்திருக்கும் என்று கூறமுடியும். n அளவு கொண்ட மாதிரிகளின் சராசரிகளில் 95% சராசரிகள் U — 2SE, U+2SE என்ற எல்லைகளுக்குள் அமைந்திருக்கும். இங்கு U என்று குறிப்பிட்டிருப்பது தொகுதியின் சராசரியாகும். இங்கு $SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ இதை வேறுவிதமாகக் கூறினால் மாதிரிகளின் சராசரி மேற்கூறிய எல்லைகளுக்குள் இருப்பதற்குரிய வாய்ப்பு 95 சதவிகிதமாக இருக்கும். மாதிரிகளின் சராசரி இவ்வெல்லைகளுக்குள் இருப்பதற்குரிய நிகழ்திறன் அல்லது சாத்தியக்கூறு 0.95.

இதை மறுதலையாகவும் கூறலாம் மாதிரிகளின் சராசரி 'm' என்றிருந்தால் m—2SE, m+2SE என்ற எல்லைகளிடையே தொகுதியின் சராசரியான 'U' என்ற அளவு 95% அமைந்திருக்கும். இச்சூழ்நிலையில் 95% மாதிரிகளில் கீழே கூறப்படும் சமமின்மையே (inequality) பொருந்துமென எதிர்பார்க்கலாம்.

$$m - 2SE < U < m + 2SE$$

எனவே இத்தகைய சமமின்மை சரியாகயிருப்பதற்குரிய நிகழ்திறனளவு 0·95. இது நம்பகத் துணையளவு என்றும், இவ்வரையறையளவுகள் நம்பக எல்லைகள் என்றும் அழைக்கப்படும். SE யின் அளவு குறையுந்தோறும் நம்பக எல்லைகளின் வீச்சளவும் குறையும். ஆகவே மாதிரிகளின் அளவு அதிகரிக்குந்தோறும் SE யின் அளவு குறையும்.

சராசரிகளின் கூட்டுகளின் மற்றும் சராசரிகளின் வேறுபாட்டின் மூலக்குறை (Standard Error of sum of Means and Standard Error of Difference Means)

இரண்டு மாதிரிகளின் சராசரிகளின் (1) கூட்டின் (2) வேறுபாட்டின் மூலவிலக்கம் அல்லது மூலக்குறை கணிப்பது காண்போம் $\bar{x}$ என்ற சராசரியையும் σ என்ற மூலவிலக்கம் கொண்ட ஒரு தொகுதியையும் எடுத்துக் கொள்வோம். மாதிரிகளின் இதர அளவுகள் கீழ்க்கண்டவாறிருக்கும்.

	மாதிரி 1	மாதிரி 2
மாதிரியின் அளவு	n_1	n_2
மாதிரியின் சராசரி	m_1	m_2

	மாதிரி 1	மாதிரி 2
மாதிரியின் சராசரிக்கும் தொகுதியின் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு	$m_1 - \bar{x}$ d_1	$m_2 - \bar{x}$ d_2

சராசரிகளின் கூட்டு $\quad m_1 + m_2$

சராசரிகளின் வேறுபாடு $\quad m_1 - m_2$

m_1 ன் வர்க்கம் $\quad \dfrac{\sigma^2}{n_1}$

m_2 வின் வர்க்கம் $= \dfrac{\sigma^2}{n_2}$

தொகுதியின் வர்க்கம் $= \sigma^2$

$(m_1 + m_2)$ வின் வர்க்கம் $= \dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

என நிருபணமாகியுள்ளது.

இதுபோன்று

$$\text{மூலக் குறை } (m_1 + m_2) = \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\text{மூலக் குறை } (m_1 - m_2) = \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

சுருங்கக் கூறின்

$$\text{மூலக் குறை } (m_1 \pm m_2) = \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

விகிதங்களில் மூலக்குறை அல்லது மூலவிலக்கம்
(Standard Error of proportion)

விகித மதிப்பீட்டளவின் மூலக்குறையைக் கீழ்க்கண்ட விதி மூலம் குறிப்பிடலாம்:

$$S.E\,(p') = \sqrt{\frac{p\,(1 - p)}{n}}$$

$q = 1 - p$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad S.E\,(p') = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

இங்கு (p) விகிதங்களின் மதிப்பீடு.

மாதிரியிலிருந்து S.E காணவேண்டுமென்றால், உண்மையில் நாம் கண்டுள்ள மாதிரியின் விகித அளவையே தொகுதியின் விகித அளவு P யின் அளவாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். விதியில் தொகுதியின் அளவை 'n' என்பதற்குப் பதிலாக (n — 1) என மாற்றலாம்.

எனவே விதியும் மாறும்.

$$S.E\,(p') = \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n-1}}$$

$$S.E\,(n_1) = n_1\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n-1}}$$

விகிதங்களின் கூட்டு அல்லது வேறுபாட்டின் மூலக்குறை

கீழேயுள்ள மாதிரிகளைக் காண்போம்:

	மாதிரி 1	மாதிரி 2
விகிதம்	p_1	p_2
மாதிரிகளின் அளவு	n_1	n_2

சராசரிக்குக் கணித்ததுபோன்று விகிதங்களின் கூட்டிற்கும் மற்றும் வேறுபாட்டிற்கும் மூலக்குறைக்கான விதிகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$\text{மூலக் குறை } (p_1 \pm p_2) = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1-1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2-1}}$$

பயிற்சி

1. மாதிரி முறைக் கோட்பாடு பற்றி ஒரு கட்டுரை வரைக.
2. மூலக்குறை அல்லது தரப்பிழை பற்றி விளக்கி நுண்மைச் சோதனையில் அதன் பயன்களைப் பற்றி விவரித்துக் கூறுக.
3. மாதிரிகள் மதிப்பீட்டளவின் எதிர் பார்ப்பு என்ற சொற்றொடர் பற்றி விவரித்துக் கூறுக.

4. கீழ்க் கண்ட தலைப்புப் பற்றிச் சிறு குறிப்பு வரைக.

(அ) புள்ளியியல் அளவு அல்லது புதுபுள்ளி

(ஆ) மூலக்குறை அல்லது தரப்பிழை

(இ) மாதிரியின் வர்க்கம்

(ஈ) நம்பக எல்லைகள்

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து சராசரியின் மாதிரி விலக்கம் கண்டுபிடி.

i.	மாதிரியின் சராசரி	—	45 கிகி
	தொகுதியின் தரவிலக்கம் அல்லது மூலவிலக்கம்	—	10 கிகி
	மாதிரியின் அளவு	—	25
ii.	மாதிரியின் சராசரி	—	ரு. 70
	தொகுதியின் வர்க்கம்	—	ரு. 12
	மாதிரியின் அளவு	—	9

6. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு மூலக்குறை கணிக்கவும்

(அ) மாதிரிகளின் சராசரிகளின் கூட்டு

(ஆ) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து கிடைக்கப்பெற்ற மாதிரிகளின் சராசரிகளினுடைய வேறுபாடு

தொகுதியின் மூலவிலக்கம் = 10

	மாதிரி 1	மாதிரி 2
மாதிரியின் அளவு	49	64
சராசரி	10 கிகி.	15 கிகி.

7. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களின் அடிப்படையில் விகிதத்திற்குரிய மூலக்குறையைக் காண்க.

மாதிரியின் அளவு	—	25
முழுமைத் தொகுதியின் விகிதத்தின் மதிப்பு	—	$\frac{1}{4}$

8. கீழ் குறிப்பிட்டவற்றிற்கு மூலக்குறை காண்க.

(அ) விகிதங்களின் கூட்டு

(ஆ) கீழ்க்கண்ட மாதிரிகளின் விகிதங்களின் வேறுபாடு

	மாதிரி 1	மாதிரி 2
மாதிரியின் அளவு	49	64
விகிதம்	1/4	1/2

அத்தியாயம் 4

நுண்மையின் சோதனைகள்

(Tests of Significance)

புள்ளியியல் முறைகளைக் கையாளுமிடங்களில் நுண்மை யின் சோதனைகள் முக்கிய இடம் வகிக்கின்றன. எனவே இது குறித்துப் படிப்பதில் மிகுந்த கவனம் தேவை.

தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் சராசரி, தொகுதியின் சராசரிக்குத் துல்லியமாகச் சமமாகயிராது என்று கண்டோம். ஒரே தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட வெவ்வேறு மாதிரிகளின் சராசரிகள் சமமாகயிரா என்றும் கண்டோம். இவ்வாறு மாதிரிகளின் உதவியால் கணித்த புள்ளியியல் அளவு களின் சராசரி வேறுபாடு அப் புள்ளியல் அளவுகளின் மூலக் குறை (Standard Error) எனப்படும் என்றும் அறிந்தோம்.

தொகுதியின் சராசரியோடு மாதிரியின் சராசரியை ஒப்பிட்டுப் பார்த்ததில் வேறுபாடிருந்த போதிலும், அம் மாதிரி அத் தொகுதியிலிருந்தே எடுக்கப்பட்டது எனக் கருதுகின்றோம். இது போன்றே இரு மாதிரிகளின் சராசரிகளிடையே வேறுபாடிருந்த போதிலும், அவ்விரு மாதிரிகளும் ஒரே தொகுதியிலிருந்தே எடுக்கப்பட்டன என்றும் கருதுகின்றோம். சிறு வேறுபாடு களுக்கு நாம் முக்கியத்துவம் கொடுப்பதில்லை அல்லது பொருட்படுத்துவதில்லை என்று தோன்றும். வேறு வழியில் கூறுவதென்றால், இம் மாதிரிகள் வெவ்வேறு தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன என்று கூறுமளவிற்கு அவைகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல என்று எடுத்துக் கொள்ளு கிறோம்.

இங்கு ஒரு வினா எழலாம். இத்தகைய வேறுபாட்டை எந்த அளவு வரையிலும் பொருட்படுத்தாதிருக்கலாம். வேறு பாட்டை நிராகரிப்பதற்கு ஒரு வரம்பு உண்டா? உண்மையில்

வேறுபாட்டை நிராகரிப்பதற்கு ஒரு வரம்பு உண்டு. குறிப்பிட்ட வரம்பை விட அதிகமானால், வேறுபாட்டிற்குரிய முக்கியத்துவம் கொடுத்து நமது கருத்தை அல்லது கொள்கையை மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும். வேறுபாட்டிற்கு ஒரு தாங்கும் அல்லது ஏற்கும் எல்லை (tolerance limit) உண்டு. அதுவரையிலும் வேறுபாட்டைப் பொறுத்துக் கொள்ளலாம் அல்லது புறக்கணிக் கலாம். வேறுபாடு, தாங்கும் எல்லையைத் தாண்டுமானால், (1) அந்த மாதிரி அத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதில்லை (2) அவ்விரு மாதிரிகளும் வெவ்வேறு தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன என்றும் முடிவு செய்யலாம். மாறாக (1) மாதிரி யின் சராசரிக்கும் தொகுதியின் சராசரிக்குமிடையேயுள்ள வேறு பாடு (2) இரு மாதிரிகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு, தாங்கும் அளவைவிடக் குறைவாகயிருந்தால், அம்மாதிரிகள் அந்தத் தொகுதியிலிருந்தே எடுக்கப்பட்டன என்று முடிவு செய்யலாம்.

குறிப்பிடத்தகு வரையறைகள்

இங்கு 5 சதவீத எல்லை மற்றும் 1 சதவீத எல்லை என இரு வரையறை எல்லைகள் உள. பொதுவாக 5 சதவீத வரையறை எல்லையே போதுமானது. மிகத் துல்லியமாக வேண்டுமானால் 1 சதவீத வரையறையை எடுத்துக்கொள்ளலாம். உண்மையான வேறுபாட்டின் அளவைவிட வேறுபாட்டின் குறிப்பிடத்தகும் நுண்மையைச் சோதிப்பதால் இது நுண்மையின் சோதனை எனப்படும். வரையறைகளும் நுண்மையின் எல்லைகள் எனப்படும்.

இயல் வேறுபாடு அல்லது பொது விகிதம் அல்லது மரபு விகிதம் அல்லது இயல்விகிதம் (Normal deviate)

நுண்மையின் சோதனையில் பொதுவாக சராசரியோ, விகிதமோ அல்லது வர்க்கமோ அல்லது உடன் தொடர்பளவு களோ நேரிடையாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுவதில்லை. மாறாக அவ் அளவுகள் தம்மில் உள்ள வேறுபாடு, அவ் அளவிற்கான மூலக்குறையளவால் வகுக்கப்பட்டு விகித அளவாக மாற்றப்படும். இவ்விகிதமே இயல் விகிதம் அல்லது இயல் வேறுபாடு எனப்படும்.

இயல் வேறுபாட்டு அட்டவணையிலிருந்து, ஒரு குறிப்பிட்ட இயல் வேறுபாட்டளவிற்குரிய நிகழ்திறன் அளவைக் கணிக்க லாம். பின்னர், கணித்துக் கிடைத்த நிகழ் திறனளவு 0.05 அல்லது 0.01 க்குக் குறைவானதா எனப் பார்க்கவேண்டும்.

(இயல் வளைவின் சமன்பாட்டில் $t = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$ கொடுத்துள்ளதைப் பார்க்கவும்.)

விளக்கம் (Interpretation)

நாம் 5 சதவீத எல்லையை நுண்மையின் சோதனைக்காக எடுத்துக்கொள்ளும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட இயல் வேறுபாட்டிற்கான நிகழ்திறனளவு 0.05க்கும் குறைவாகயிருந்தால், அத்தகைய வேறுபாடு தோன்றுவதற்கான சாத்தியக்கூறு 0.05 க்குக் குறைவானதென்று கூறலாம். எனவே அவ்வேறுபாடு சந்தர்ப்பத்தினாலோ அல்லது மாதிரிகளினால் ஏற்படும் மாற்றம் காரணமாகவோ நிகழ்ந்ததல்ல. மாறாக, அத்தகைய வேறுபாடு உண்மையிலேயேயுள்ள குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடே என்று கூறலாம். இதுபோன்று நுண்மைச் சோதனையை 1 சதவீத வரையறையிலும் கையாளலாம். இயல் விகிதத்திற்கான நிகழ்திறன் 0.01-க்கும் குறைவாகயிருந்தால், விலை மதிப்புகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு சந்தர்ப்ப வசத்தாலோ அல்லது மாதிரிகளைத் தெரிந்தெடுப்பதில் உள்ள காரணத்தினாலோ நிகழ்ந்ததல்ல. மாறாக, அவ்வேறுபாடு அம்மதிப்புகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டால் நிகழ்ந்ததே என்று முடிவு கூறலாம் எனவே, வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதே என்றும் கூறலாம். மாறாக, இயல் வேறுபாட்டிற்கான நிகழ்திறன் அளவு தேவையான வரையறை எல்லை (0.05 அல்லது 0.01) அளவிற்கும் அதிகமாயிருந்தால், அத்தகைய வேறுபாட்டிற்குரிய வாய்ப்பு அதிகமாக உளது என்று கூறி, வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க அளவுடையதல்ல என்று கூறுவோம்.

ஆய்வின் முடிவில் உள்ள குறைகள் (Error of judgement)

இம்முறையில் தவறு நேர்வதற்குரிய வாய்ப்பு உளது. ஒரு குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு அல்லவென்றும், குறிப்பிட்டுக் கூறமுடியாத வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு என்றும் கூறக்கூடிய குறைகள் நேரலாம். வரையறை எல்லைகளைக் கையாள்வதால் இக்குறைகளை நாம் ஒத்துக்கொள்ளுகின்றோம். இத்தகைய இருவிதக் குறைகளால் புள்ளியியல் வல்லுனர்களிடையே பெரிய கருத்து மோதலே ஏற்பட்டுள்ளது. என்றாலும் புள்ளியியல் ஆய்வுகளில் இச்சோதனை மிகப் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

நடைமுறையில் நுண்மையின் சோதனை

நடைமுறையில் நுண்மையின் சோதனை, குறிப்பிட்ட இயல் விகிதத்திற்கான நிகழ் திறனளவு, தேவைக்கேற்ற 0.05 அல்லது

0 01 என்ற நிகழ்திறனளவோடு ஒப்பிட்டு ஆய்வு செய்யப்படுவ தில்லை. மாறாக, கணித்துக் கிடைத்த இயல் விகித அளவே தேவைக்கேற்ற 0.05 அல்லது 0.01 நிகழ்திறனளவுகளுக்கான இயல் விகித அளவுகளோடு ஒப்பிடப்படும். 0·05 நிகழ்திறனுக் கான இயல் விகித அளவு 1.96 அல்லது 2 என்றும் 0.01 நிகழ்திறனுக்கான இயல் விகித அளவு 2·58 அல்லது 3 என்றும் கணிக்கப்பட்டுள்ளது. இதிலுள்ள நன்மை என்ன வெனில் நாம் ஒவ்வொரு தடவையும் கணித்துக்கிடைத்த இயல் விகிதத்திற்கான நிகழ்திறனை அட்டவணையிலிருந்து கணிக்கத் தேவையில்லை. ஏனெனில் 0 05 மற்றும் 0.01 என்ற நிகழ்திறன் அளவுகளுக்கான 1.96 மற்றும் 2.58 என்ற இரு இயல் விகித அளவுகளும் என்றும் நிலையானவை.

நாம் கணித்துக் கிடைத்த இயல் விகித அளவு, 1.96க்கு அதிகமாகயிருந்தால், மதிப்புகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு 5 சதவீத வரையறையளவில் குறிப்பிடத்தக்கது என்று கூறலாம். மாறாக, கணித்துக் கிடைத்த இயல் விகித அளவு 1.96க்கும் குறைவாகயிருந்தால், மதிப்புகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல எனக் கூறலாம். இதேபோன்ற வாதத் தையே கணித்துக் கிடைத்த இயல்விகித அளவு 1 சதவிகித அளவான 2·58-ஐவிடக் கூடுதலாகவோ அல்லது குறை வாகவோயிருந்தால் கூறலாம்.

சூன்யக் கோட்பாடு (Null Hypothesis)

நமது சோதனைகளிலெல்லாம், நாம் இரு வித எடுகோள் களின் அடிப்படையில்தான் அணுகுகின்றோம் என்பதை உணரவேண்டும்.

(1) மாதிரி அந்தக் குறிப்பிட்ட தொகுதியிலிருந்தே எடுக்கப் பட்டது.

(2) இரண்டு மாதிரிகளும் ஒரே தொகுதியிலிருந்தே எடுக்கப்பட்டன. மறைமுகமாக ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பளவில் (i) மாதிரியின் அளவிற்கும் தொகுதியின் அளவிற்கும் வேறுபாடில்லை (ii) இரு மாதிரிகளின் அளவுகளிடையே வேறுபாடில்லை என்று பொருள் படும். இத்தகைய ஆய்வின் அடிப்படைக் கொள்கை 'வேறுபாடில்லை' அல்லது 'சூன்ய வேறுபாடு' என்று கருதுவதால் இத்தகைய கோட்பாடு 'சூன்யக் கோட்பாடு' எனப்படும்.

சூன்யக் கொள்கையை எடுத்துக்கொண்ட பின்னர் கணிதத்தில் கொடுத்துள்ள விவரங்களின் அடிப்படையில் சூன்யக் கொள்கையின் உண்மை நிலையைச் சோதிக்கின்றோம். சூன்யக் கொள்கையை ஏற்றுக் கொள்ளவோ அல்லது மறுக்கவோ செய்வோம். சூன்யக் கொள்கையை மறுக்கும் போது குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடுள்ளது என்றும், சூன்யக் கொள்கையை ஏற்றுக் கொள்ளும்போது வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல என்றும் பொருள்படும்.

செயல்முறைச் சோதனைகள்

நுண்மையின் சோதனைகளைக் கீழேகண்ட வேறுபாடுகளை ஆய்வதில் கையாள்வோம்:

1. மாதிரியின் சராசரிக்கும் தொகுதியின் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாட்டைச் சோதிப்பது;
2. இரு மாதிரிகளின் சராசரிகளிடையேயுள்ள வேறுபாட்டைச் சோதிப்பது;
3. ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பைப் பொறுத்தளவில் மாதிரியின் விகிதத்திற்கும் தொகுதியின் விகிதத்திற்குமுள்ள வேறுபாட்டைச் சோதிப்பது ;
4. ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பைப் பொறுத்தளவில் இரு மாதிரிகளின் விகித அளவுகளிடையேயுள்ள வேறுபாட்டைச் சோதிப்பது;

இயல் வேறுபாட்டளவு கணிப்பு (Computation of Normal Deviate)

எல்லாச் சோதனைகளிலும் நாம் இயல் வேறுபாட்டளவிலிருந்தே அணுகுகின்றோம். நாம் சோதனைக்காக எடுத்துக் கொண்ட சராசரி அல்லது விகித அளவுக்கான மூலக்குறை (Standard Error) அளவை முதலில் தெரிந்துகொள்ளவேண்டும். மூலக்குறையைக் கணிக்கவேண்டிய நிலை ஏற்பட்டால் தொகுதியின் மூலவிலக்கம் தெரிந்தாகவேண்டும். சில சந்தர்ப்பங்களில் தொகுதியின் மூலவிலக்கமோ அல்லது வர்க்கமோ கொடுக்காத காரணத்தால், தொகுதியின் அளவுகளை மாதிரியின் துணை கொண்டே கணிக்கவேண்டும்.

மாதிரியின் வகைகள்

மாதிரிகள், பெருமாதிரிகள் (Large samples), சிறு மாதிரிகள் (Small samples) என இரு வகைப்படும். மாதிரியின் அளவு அல்லது மாதிரியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 30 அல்லது அதற்கும் அதிகமாகயிருந்தால் பெரு மாதிரி என்றும், மற்றவைகள் சிறு மாதிரிகள் என்றும் கருதப்படும். மாதிரியின் அடிப்படையில் தொகுதியின் வர்க்கம் கணிப்பதில் இவ்விருவகை மாதிரிகளிடையே வேறுபாடு உண்டு.

1. மாதிரியின் சராசரிக்கும் தொகுதியின் சராசரிக்குமிடையே யுள்ள வேறுபாட்டைச் சோதித்தல்

முதலில் 30 நபர்களுக்குமேல் அடங்கிய பெரு மாதிரியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு புகழ்பெற்ற நிறுவனம் தங்களுடைய டயர் மிக உறுதி வாய்ந்ததென்றும் நீடித்து உழைப்பதென்றும் விளம்பரப்படுத்தினர். ஒரு டயர் எத்தகைய பழுதுபார்க்கவேண்டியதும் இல்லாமல் சராசரி 16000 கிமீ. ஓடும் என்றும் இவைகளின் சராசரி வேறுபாடு 1500 கிமீ. என்றும் விளம்பரம் செய்துள்ளது. 100 டயர்கள் வாங்கியதில் சராசரி ஓட்டம் 15500 கிமீ. என்று தெரிந்தது. இந்த 100 டயர்களும் இந்த நிறுவனத்தில் உற்பத்தியானவையா அல்லது வேறு நிறுவனத்தினதா என்று ஆராயவும்.

தொகுதியின் சராசரி	=	16000 கிமீ.
தொகுதியின் மூலவிலக்கம்	=	1500 கிமீ.
மாதிரியின் அளவு	=	100 டயர்கள்
மாதிரியின் சராசரி	=	15500 கிமீ.

இவ்விவரங்கள் கணிதத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

முதலில் இந்த 100 டயர்களும் அதே நிறுவனத்தைச் சார்ந்தனவே எனக் கருதுவோம். இக் கோட்பாட்டால் இரு சராசரிகளிடையே வேறுபாடில்லை என்று எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம் என்றாலும், அவ்விரண்டு சராசரிகளுக்குமிடையே வேறுபாடு உண்டு.

இரண்டு சராசரிகளுக்குமிடையேயுள்ள வேறுபாடு = 16000 — 15500 கிமீ.
= 500 கிமீ.
(இதில் வேறுபாட்டின் அடையாளக் குறியைக் கவனிக்க வேண்டாம்.)

$$\text{சராசரியின் மூலக் குறை} = \frac{\text{தொகுதியின் மூல விலக்கம்}}{\sqrt{\text{மாதிரியின் அளவு}}}$$

$$= \frac{1500}{\sqrt{100}} = \frac{1500}{10} = 150 \text{ கிமீ.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{சராசரிகளின் வேறுபாட்டிற்குரிய}\\\text{இயல் வேறுபாட்டளவு}\end{array}\right\} = \frac{x - \bar{x}}{\sigma \bar{x}} = \frac{500}{150} = 3.3$$

கணித்துக் கிடைத்த இயல் வேறுபாட்டளவான (3.3) என்பது 5 சதவீதம் வரையறைக்குரிய இயல் வேறுபாட்டளவான 1·96 ஐ விட அதிகமானது. மேலும் 1 சதவீத அளவிற்கான இயல் வேறுபாட்டளவான 2.58 ஐ விடவும் அதிகமானது.

எனவே, மாதிரியின் சராசரிக்கும் தொகுதியின் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதாகும். எனவே நமது சூன்ய வேறுபாட்டுக்கொள்கை மறுக்கப்படுகிறது. எனவே விலைக்கு வாங்கிய 100 டயர்களும் மேற்கூறிய நிறுவனத்தின் உற்பத்தியல்ல; வேறு நிறுவனத்தின் உற்பத்தியைச் சார்ந்தன.

எடுத்துக்காட்டு 2

வேறு ஒரு வியாபாரியிடமிருந்து 36 டயர்கள் வாங்கப்பட்டன. அவைகளின் சராசரி ஓட்டம் 16000 கிமீ. இவை முன்னர் விளம்பரம் செய்துள்ள நிறுவனத்தின் பொருளாகுமா ?

தொகுதியின் சராசரி	=	16000 கிமீ.
தொகுதியின் மூலவிலக்கம்	=	1500 கிமீ.
மாதிரியின் சராசரி	=	16600 கிமீ.
மாதிரியின் அளவு	=	36
சராசரிகளின் வேறுபாடு	=	16600-16000 கிமீ.
	=	600 கிமீ.

$$\text{சராசரியின் மூலக்குறை} = \frac{\text{தொகுதியின் மூல விலக்கம்}}{\sqrt{\text{மாதிரியின் அளவு}}}$$

$$= \frac{1500}{\sqrt{36}} = \frac{1500}{6} = 250$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{சராசரியின் வேறுபாட்டிற்கான}\\ \text{இயல் வேறுபட்டு விகிதம்}\end{array}\right\} = \frac{\text{வேறுபாடு}}{\text{மூலக்குறை}}$$

$$= \frac{600}{250} = 2.40$$

நாம் கணித்துள்ள இயல் வேறுபாட்டு விகித அளவு (2.4) 5 சதவிகித எல்லைக்கான இயல் வேறுபாட்டளவைவிட (1.96) கூடுதலாகவும் 1 சதவிகித எல்லைக்கான இயல் வேறுபாட்டள வைவிட (2·58) குறைவாகவும் உள்ளது. எனவே 5 சதவிகித எல்லையளவில வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதாகவும் 1 சதவிகித எல்லையளவில் வேறுபாடு குறிப்பிடத் தக்கதல்ல என்றும் தோன்றுகிறது.

எனவே 5 சதவிகித எல்லையளவில் சூன்யக் கோட்பாட்டை மறுக்கவும், 1 சதவிகித எல்லையளவில் சூன்யக் கோட்பாட்டை ஏற்றுக்கொள்ளவும் வேண்டும். ஆகவே 5 சதவிகித எல்லையளவில் 36 டயர்களும் அந் நிறுவனத்தின் சரக்கல்லவென்றும் 1 சதவிகித எல்லையளவில் அந் நிறுவனத்தில் சரக்கென்றும் கூறுவோம்.

2. இரு மாதிரிகளின் சராசரிகளின் வேறுபாட்டைச் சோதித்தல்

எடுத்துக்காட்டு

மாணவர்களிடையே ஒரு குறிப்பிட்ட நுண்ணறிவு சோதனை நடத்தப்பட்டது. அதில், அவர்களின் மூலவிலக்கம் 40. மதிப்பெண்களாகக் கணிக்கப்பட்டது. 16 மாணவர்கள் கொண்ட பிரிவில் இச் சோதனையை நடத்தியதில் சராசரி மதிப்பெண் 150 எனத் தெரிந்தது. 25 மாணவர்கள் கொண்ட இரண்டாவது பிரிவில் சோதனையை நடத்தியதில் சராசரி மதிப்பெண் 140 எனக் கணிக்கப்பெற்றுள்ளது. அவை குறிப்பிடப்படும் வேறுபாட்டைக் குறிக்கின்றனவா ?

		மாதிரி—1	மாதிரி—2
அளவு	...	$n_1 = 36$	$n_2 = 64$
சராசரி	...	$m_1 = 150$	$m_2 = 160$

தொகுதியின் மூலவிலக்கம் = 40

சராசரிகளின் வேறுபாட்டின் ($m_1 - m_2$) மூலக்குறை

$$= \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$= 40 \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{64}}$$

$$= 40 \sqrt{\frac{100}{36 \times 64}}$$

$$= \frac{40 \times 10}{6 \times 8}$$

$$= 8.33$$

சராசரிகளின் வேறுபாடு $= 160 - 150 = 10$

சராசரிகளின் வேறுபாட்டிற்குரிய இயல் வேறுபாட்டிற்கிணை-

யான அளவு $= \frac{10}{8.33} = 1.2$

எனவே, வேறுபாடு 5 சதவீத எல்லை மற்றும் 1 சதவீத எல்லைகள் நிலையில் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல. ஏனெனில் கணித்த அளவு 1.96 மற்றும் 2.58 என்ற அளவுகளைவிடக் குறைந்ததே. எனவே இரு மாதிரிகளும், மூலவிலக்கம் 40 கொண்ட அதே தொகுதியைச் சார்ந்தனவே.

கீழே உள்ள எடுத்துக்காட்டைக் கவனிப்போம்:

		மாதிரி 1	மாதிரி 2
மாதிரியின் அளவு	...	$n_1 = 81$	$n_2 = 100$
சராசரி	...	$m_1 = 6.0$	$m_2 = 4.5$
வர்க்கம்	...	$v_1 = 10.5$	$v_2 = 10.25$

இக்கணிதத்தில் தொகுதியின் மூலவிலக்கம் கொடுக்கப்படாத காரணத்தால் மாதிரிகளிலிருந்து கணிக்கப்பட வேண்டும்.

சராசரிகளின் வேறுபாடு $= m_1 - m_2 = 6.0 - 4.5 = 1.5$

$$\text{S. E.} (m_1 - m_2) = \sqrt{\frac{v_1}{n_1} + \frac{v_2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{10 \cdot 50}{81} + \frac{10 \cdot 25}{100}} = 0.48$$

$$\text{விகித அளவு} = \frac{\text{சராசரிகளின் வேறுபாடு}}{\text{சராசரிகளின் வேறுபாட்டின் மூலக்குறை}}$$

$$= \frac{1.5}{0.48} = 3.12.$$

வேறுபாடு 5 சதவீத மற்றும் 1 சதவீத எல்லை அளவிலும் குறிப்பிடத்தக்கது என்று தெரிகிறது.

3. விகிதங்களின் நுண்மையைச் சோதித்தல்:

(1) மாதிரியின் விகிதந்திற்கும் கொடுத்துள்ள விகிதத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டைச் சோதித்தல்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு நாணயம் 100 தடவைகள் சுண்டப்பட்டது. தலை 65 தடவைகள் தோன்றியது. அது நல்ல நாணயம்தானா என ஆய்வு செய்க.

நாணயம் நல்ல நாணயம் என வைத்துக்கொள்வோம். நாணயம் நல்லதாகயிருந்தால் 100 தடவைகளில் 50 தடவைகள் தலையும் 50 தடவைகள் பூவும் தோன்றவேண்டும். இந்நிலை தான் தொகுதியில் அமைந்திருக்கும். எனவே தலை தோன்றுவதற்கான விகிதம் $\frac{50}{100} = 0.5$.

தொகுதியின் விகிதம் $= 0.5$

மாதிரியின் விகிதம் $= \frac{65}{100} = 0.65$

இரு விகிதங்களின் வேறுபாடு $= 0.65 - 0.50 = 0.15$

விகிதத்தின் மூலக்குறை $= \sqrt{\frac{pq}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$$

இயல் வேறுபாட்டிற்கிணையான விகிதம்

$$= \frac{\text{விகிதங்களின் வேறுபாடு}}{\text{விகிதத்தின் மூலக்குறை}}$$

$$= \frac{0.15}{0.05} = 3.$$

இவ்விகித அளவு (3) 1.96 மற்றும் 2.58 என்ற 5 சதவிகித மற்றும் 1 சதவிகித எல்லை அளவுகளுக்கான அளவுகளைவிட அதிகமாகயிருப்பதால், விகிதங்களின் வேறுபாடு குறிப்பிடத் தக்கது எனக் கூறலாம். எனவே நமது எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகையால் நாணயம் நல்ல நாணயமன்று. 5 சதவிகிதம் மற்றும் 1 சதவிகித அளவுகளைப் பொறுத்தளவில் பழுதுடையது.

(2) இரு மாதிரிகளின் விகிதங்களிடையேயுள்ள வேறுபாட்டைச் சோதித்தல்

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு நாட்டில் ஆய்வு செய்தபோது ஒரு குறிப்பிட்ட நோய் 2 சதவிகித மக்களைப் பாதித்திருப்பதாகத் தெரிந்தது. 500 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு கல்லூரியில் 5 மாணவர்கள் இந் நோயினால் தாக்கப்பட்டதாகவும், மற்றொரு கல்லூரியில் 1500 மாணவர்களில் 30 மாணவர்கள் இந் நோயினால் தாக்கப் பட்டுள்ளனர் என்றும் தெரிகிறது. இது குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைக் காண்பிக்கிறதா?

	மாதிரி 1	மாதிரி 2
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	$n_1 = 500$	$n_2 = 1500$
பாதிக்கப்பட்டோர் எண்ணிக்கை	$x_1 = 5$	$x_2 = 30$
பாதிக்கப்பட்டோர்களின் விகிதம்	$p_1 = \frac{5}{500} = 0{\cdot}01$	$p_2 = \frac{30}{1500} = 0.02$

விகிதங்களின் வேறுபாடு $= 0.01 - 0.02 = 0.01$

தொகுதியின் விகிதம் $p = 0.02$

விகித வேறுபாட்டின் மூலக்குறை

$$S.E\ (p_1 - p_2) = \sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}$$

$$p = 0.02; \quad q = 1 - p = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$S.\ E.\ (p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$= \sqrt{0.02 \times 0.98\left(\frac{1}{500}+\frac{1}{1500}\right)}$$

$$= \sqrt{0.02 \times 0.98 \times \frac{4}{1500}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.0196}{375}} = 0.0073$$

இயல் வேறுபாட்டிற்கிணைந்த விகித அளவு

$$= \frac{\text{விகிதங்களின் வேறுபாடு}}{\text{வேறுபாட்டின் மூலக்குறை}}$$

$$= \frac{0 \cdot 01}{0 \cdot 0073} = 1 \cdot 4$$

இம் மதிப்பு 1.96 மற்றும் 2.58 என்ற அளவுகளைவிடக் குறைந்தது. எனவே வேறுபாடு 5 சதவிகித மற்றும் 1 சதவிகித எல்லை நிலைகளில் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

இக்கணக்கில் தொகுதியின் விகிதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்பதை உணரவேண்டும். சில இடங்களில் தொகுதியின் விகிதம் கொடுக்கப்படாதிருக்கலாம். இச்சூழ்நிலைகளில், மாதிரிகளின் விகிதங்களின் அடிப்படையில்தான் தொகுதியின் விகிதம் கணிக்கப்படவேண்டும். முன்னர் கொடுத்த அதே தொகுதியையே விகிதமின்றி எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\text{தொகுதியின் விகிதம்} = \frac{n_1 \times p_1 + n_2 \times p_2}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{5+30}{500 + 1500} = \frac{35}{2000}$$

$$= 0.0175$$

$$q = 1 - p = 1 - 0.0175 = 0 \cdot 9825$$

விகித வேறுபாட்டின் மூலக்குறை =

$$\sqrt{0.0175 \times 0 \cdot 9825 \times \frac{4}{1500}} = 0 \cdot 007$$

$$\text{இயல் வேறுபாட்டிற்கிணையான விகிதம்} = \frac{0 \cdot 01}{0 \cdot 007} = 1 \cdot 4$$

கணித்த அளவு 1·96 மற்றும் 2·58 என்ற அளவுகளைவிடக் குறைவாகயிருப்பதால் வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

பயிற்சி

1. புள்ளியியல் ஆய்வில் நுண்மையின் சோதனைகள் பற்றி விளக்கிக் கூறு. புள்ளியியல் முறைகளைக் கையாளும் இடங்களில் அவை எவ்வாறு பயன்படு கின்றன ?

2. நுண்மையின் எல்லைபற்றி விவரிக்க.

3. கீழ்க்கண்ட தலைப்புப் பற்றிச் சிறு குறிப்பு வரைக.

   (அ) நுண்மையின் எல்லை;

   (ஆ) இயல் வேறுபாடு அல்லது மரபு விகிதம்;

   (இ) சூன்யக் கோட்பாடு.

4. 1000 பேர் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் சராசரி 45 கி.கி. அதன் தர விலக்கம் 9 கிகி. இம் மாதிரி, 42 கி.கி. சராசரியும் 9 கி கி. தர விலக்கமும் கொண்ட ஒரு தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதா என்பதைக் காண்க.

5. கீழ்க்கண்ட இரண்டு மாதிரிகளும் 15 கிகி. தர விலக்கம் கொண்ட ஒரு தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப் பட்டனவா என்பதைக் காண்க.

	மாதிரி 1	மாதிரி 2
மாதிரியின் அளவு	25	81
சராசரி	10	12

6. ஒரு நகரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியில் 500 பேர்களில் 400 பேர் புகை பிடிப்பவர்கள். மற்றொரு பெரிய நகரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியில் 1000 பேர்களில் 800 பேர் புகை பிடிப்பவர்கள். இவைகள் தம்மில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உளதா ?

7. ஒரு நாணயம் 350 முறை சுண்டப்பட்டபோது 150 முறை தலை தோன்றியது. இந் நாணயம் ஓரத்தன்மை உடையதா என ஆய்க.

அத்தியாயம் 5

பண்பு சேர்க்கை

(Association of Attributes)

பண்புகளின் விவரங்கள்

குணப் பண்புகள் பற்றியும் அளவை முறையில் உள்ள பண்புகள் பற்றியும் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கலாம் என முன்பு படித்தோம். மக்கள் தொகையைப் பால், கல்வி, தொழில்வாரியாகப் பகுக்கும்போது அது பண்பு பாகுபாடு எனக் கருதப்படும். மாறாக, வருவாய் அடிப்படையில் மக்கள் தொகை பகுக்கப்பட்டால் அது அளவைப் பாகுபாடு எனப்படும். விளக்கப் பண்புகள் முறையில் சேகரிக்கப்படும் விவரங்கள் பண்பு விவரங்கள் எனப்படும். இது வரையில் திரிபு விவரங்கள் பற்றிப் படித்தோம். இனி இரு பண்புகளின் தொடர்பு பற்றி ஆய்வு செய்து சேர்க்கை முறையில் அதை எவ்வாறு உறுதி செய்வது என்பதையும் ஆய்வோம்.

பிரிவுகளும் அவைகளின் அலைவெண்களும்

இம்முறையில் குறிப்பிட்ட ஒரு நபர் ஒரு குணம் உடையவரா அல்லது இல்லாதவரா என்று கூறலாம். வேறு விதத்தில் கூறுவதாக இருந்தால் ஒரு நபரிடம் ஒரு குறிப்பிட்ட குணம் உண்டு அல்லது இல்லை என்று கூறலாம். பொது மரபு என்னவெனில் குணம் இருந்தால் அதைப் பெரிய எழுத்துகளால் A,B,C என்று குறிப்பிடுவர். குணம் இல்லாதிருந்தால் அதை கிரேக்க மொழியில் A, B, C என்ற எழுத்துகளுக்கு இணையான α, β, γ என்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடுவர்.

' A ' என்ற குணமுடையோர் ' A ' பிரிவைச் சேர்ந்தவர் எனக் கருதப்படுவர். ' A ' பிரிவில் சேர்ந்தவர்களின் எண்ணிக்கை A ' பிரிவின் அலைவெண்ணாகும். ' A ' பிரிவின் அலைவெண் அடைப்புகளால் (A) குறிக்கப்பெறும். இது போன்று B, C என்ற பிரிவுகளின் அலைவெண்களும் முறையே

(B), (C) என்று எழுதப்படும். ' A ' என்ற குணமில்லாதவர் α பிரிவைச் சேர்ந்தவராவார். ' A ' குணமில்லாதவர்கள் எண்ணிக்கை α பிரிவின் அலைவெண்ணாகக் கருதப்பட்டு (α) என்றும் கருதப்படும்.

இரு குணங்கள் இருந்தால் அக்குணங்களின் எழுத்துகள் அடுத்தடுத்து எழுதப் பெற்று அலைவெண்களும் அடைப்புகளினுள் அமைக்கப்படும். (AB) அல்லது ($\alpha\beta$) அல்லது (Bα) அல்லது (Aβ). இதைக் கீழே கண்டவாறு விளக்கலாம்.

(AB) = A மற்றும் B என்ற இரு பண்புடையோர்களின் எண்ணிக்கை.

(Aβ) = A மற்றும் β என்ற இரு பண்புடையோர்களின் எண்ணிக்கை (அல்லது A என்ற பண்புடையவர்களும் அதே சமயம் B என்ற பண்பு இல்லாதவர்களும்)

(Bα) = B மற்றும் α என்ற இரு பண்புடையோர்களின் எண்ணிக்கை (அல்லது B என்ற பண்புடையோர்களும் அதே நேரத்தில் A என்ற பண்பு இல்லாதவர்களும்)

($\alpha\beta$) = α மற்றும் β என்ற இரு பண்புகளைக் கொண்டவர்கள் அல்லது A மற்றும் B என்ற இரு பண்புகள் இல்லாதவர்களின் எண்ணிக்கை.

நேர் மற்றும் எதிர் பண்புகள் (Positive & Negative Attributes)

A, B, C என்ற எழுத்துகளால் குறிக்கப்பட்ட பண்புகள் நேர் பண்புகள் என்றும் α, β, γ, என்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடப்பட்ட பண்புகள் எதிர் பண்புகள் என்றும் கருதப்படும். இது போன்று A, B மற்றும் AB பிரிவுகள் ' நேர் பிரிவுகள் ' என்றும் α, β, $\alpha\beta$ என்ற பிரிவுகள் ' எதிர் பிரிவுகள் ' என்றும் அழைக்கப்பெறும். கீழே கொடுத்துள்ள பிரிவுகள் ' முரண் இணைப் பிரிவுகள் ' (Pair of contrary classes) எனப்படும்.

AB மற்றும் $\alpha\beta$
Aβ மற்றும் Bα

பிரிவுகளின் நிலைகள் (Order of classes)

ஒரே ஒரு பண்புடைய பிரிவு, ஒரு நிலைப் பிரிவு எனப்படும். இரு பண்புகள் கொண்ட பிரிவு இரு நிலைப்பிரிவு (second order) எனப்படும். A மற்றும் AB என்ற பிரிவுகள் முறையே ஒரு நிலை-

மற்றும் இரு நிலைப் பிரிவுகளாகும். இதுபோன்றே (A) மற்றும் (B) என்ற அலைவெண்கள் ஒரு நிலைப் பிரிவு அலைவெண்கள் என்றும், $(A\beta)$, $(B\alpha)$, $(\alpha\beta)$ மற்றும் (AB) என்ற அலைவெண்கள் இருநிலை அலைவெண்கள் என்றும் அழைக்கப்பெறும்.

குணங்கள் குறிப்பிடப்படாதபோது, மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை, வரையறை கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொகுதியாகக் கருதப்படும். இது ' N ' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

கடைசிப் பிரிவுகளும் அதன் அலைவெண்களும்

மிக உயர்ந்த நிலைப் பிரிவு, கடைசிப் பிரிவு என்றும், அதன் அலைவெண் உயர்ந்த நிலைப் பிரிவலைவெண் என்றும் அழைக்கப்பெறும். AB மற்றும் $A\beta$ என்ற பிரிவுகளின் அலைவெண்களான (AB) மற்றும் $(A\beta)$ தெரிந்தால் A பிரிவின் அலைவெண்ணான (A) யைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இதுபோன்று $\alpha\beta$ மற்றும் αB பிரிவுகளின் அலைவெண்களான $(\alpha\beta)$ மற்றும் (αB) தெரிந்தால் α பிரிவின் அலைவெண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம். (A) மற்றும் (α) அலைவெண்களைக் கண்டுபிடித்துவிட்டால் ' N ' கண்டுபிடிக்கலாம். ஏனெனில் $(A)+(\alpha)=N$. மொத்த அலைவெண், 1. பண்பு உடையன 2. பண்பு இல்லாதன என இரு பிரிவுகளாகப் பகுக்கப்படும் என்பதால் இந்நிகழ்ச்சி உருவாகிறது.

இம்முறையில் கீழே உள்ள சமன்பாடுகளை நிறுவலாம்.

$$(A) + (\alpha) = N \quad \cdots \quad (1)$$
$$(B) + (\beta) = N \quad \cdots \quad (2)$$
$$(AB) + (A\beta) = (A) \quad \cdots \quad (3)$$
$$(AB) + (\alpha B) = (B) \quad \cdots \quad (4)$$
$$(\alpha\beta) + (\alpha B) = (\alpha) \quad \cdots \quad (5)$$
$$(\alpha\beta) + (A\beta) = (\beta) \quad \cdots \quad (6)$$

(1) மற்றும் (2) என்ற இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$(A) + (\alpha) = (B) + (\beta) = N \quad \cdots \quad (7)$$

(3) மற்றும் (5) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$(AB) + (A\beta) + (\alpha B) + (\alpha\beta) = N \quad \cdots \quad (8)$$

மற்றும் (4) மற்றும் (6) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$(AB) + (B\alpha) + (\alpha\beta) + (A\beta) = N \quad \cdots \quad (9)$$

சமன்பாடு (8) = சமன்பாடு (9) என்பதும் தெரிந்ததே.

எடுத்துக்காட்டு

கீழே கொடுத்துள்ள கடைசி அலைவெண்களிலிருந்து நேர் மற்றும் எதிர்ப் பிரிவுகளின் அலைவெண்களைக் கணிக்கவும்;

$(AB) = 125$; $(\alpha B) = 50$; $(\alpha\beta) = 75$; $(A\beta) = 60$.

முதலில் ' N ' -ஐக் கணிப்போம்.

$$\begin{aligned} N &= (AB) + (\alpha B) + (\alpha\beta) + (A\beta) \\ &= 125 + 50 + 75 + 60 \\ &= 310. \end{aligned}$$

நேர் பிரிவுகளாவன A, B மற்றும் AB.

நேர் பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் (A), (B) மற்றும் (AB);

எதிர் பிரிவுகள் α, β, $\alpha\beta$

எதிர் பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் (α), (β) மற்றும் $(\alpha\beta)$;

$$\begin{aligned} (A) &= (AB) + (A\beta); \\ &= 125 + 60 \\ &= 185 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (B) &= (AB) + (\alpha B) \\ &= 125 + 50 \\ &= 175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha) &= (\alpha\beta) + (B\alpha) \\ &= 75 + 50 \\ &= 125 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\beta) &= (\alpha B) + (A\beta) \\ &= 75 + 60 \\ &= 135 \end{aligned}$$

என்பவை தெரிந்ததே.

N, (A), (B) மதிப்புகளிலிருந்து (α), (β) என்பவற்றின் மதிப்புகளை எதிர்முகமாகவும் கணிக்கலாம்.

$$\begin{aligned} N &= (A) + (\alpha) \\ 310 &= 185 + (\alpha) \\ \therefore (\alpha) &= N - (A) \\ &= 310 - 185 \\ &= 125. \end{aligned}$$

இதுபோன்று $N = (B) + (\beta)$

$310 = 175 + (\beta)$

$$\therefore \; (\beta) = 310 - 175$$
$$= 135.$$

மேலே உள்ள விவரங்களைக் கீழே கொடுத்துள்ள அட்டவணையில் அமைக்கலாம்.

(AB)	(Bα)	(B)
(Aβ)	(αβ)	(β)
(A)	(α)	N

125	50	175
60	75	135
185	125	310

அட்டவணையை அமைத்து வகுப்புகளுக்குரிய அலைவெண்களை அமைத்த பின்னர் (A), (B) மற்றும் N என்பவற்றின் மதிப்பைக் கணிக்கலாம்.

பண்புகளின் தனி நிலை அல்லது சுயப் பண்புகள் அல்லது சார் பற்றநிலை (Independence of Attributes)

இரு பண்புகளிடையே தொடர்பு இல்லையானால் அவை தனி நிலையானவை எனக் கூறலாம். A, B என்ற இரு பண்புகள் தனி நிலையானவையாகயிருந்தால் கீழே உள்ள சமன்பாடு உருவாகும்.

$$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)} = \frac{(A)}{N}$$

1. $\frac{(AB)}{(B)}$ = Bயில் Aயின் விகிதம்

2. $\frac{(A\beta)}{(\beta)}$ = β யில் Aயின் விகிதம்

3. $\frac{(A)}{N}$ = மொத்தத்தில் Aயின் விகிதம்

இதுபோன்று கீழேயுள்ள நிலையையும் உருவாக்கலாம்.

$$\frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)} = \frac{(B)}{N}$$

1. Aயில் Bயின் விகிதம் $\frac{(AB)}{A}$

2. α யில் B யின் விகிதம் = $\frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$

3. மொத்தத்தில் Bயின் விகிதம் = $\frac{(B)}{N}$

$(AB) = \frac{(A)(B)}{N}$ என்று நிரூபிக்கமுடிந்தால் A, B என்ற இரு பண்புகளும் சுய பண்புகள் அல்லது தனி நிலைப் பண்புகள் எனலாம்.

A மற்றும் B என்ற இரு பண்புகளும் தனி நிலையானவை யாக இருந்தால் அவைகளின் முரணும் α மற்றும் β என்ற இரு பண்புகளும் தனி நிலையானவையே அல்லது சுயமானவைகளே. α மற்றும் β என்ற இரு பண்புகள் சுயமானவையாகயிருந்தால் கீழேயுள்ள சமன்பாடு உண்டாகும்.

$$(\alpha\beta) = \frac{(\alpha)(\beta)}{N}$$

எடுத்துக்காட்டு 1

(A) = 100 = தடுப்பு ஊசி போட்டுக் கொண்டோர்

(B) = 120 = காய்ச்சலினால் பாதிக்கப்படாதோர்

(AB) = 40 = தடுப்பு ஊசி போட்டவர்களும் பாதிக்கப் படாதவர்களும்

(N) = 300 = மொத்த மக்கள்

A மற்றும் B என்ற பண்புகள் சுயமானவையா எனக் காண்க.

இதற்காகக் கீழேயுள்ள சமன்பாடு உருவாகின்றதா என்று காணவேண்டும்.

$$(AB) = \frac{(A)(B)}{N}$$

$$40 = \frac{100 \times 120}{300} = 40$$

சமன்பாடு உருவாகின்றது.

எனவே A மற்றும் Bயும் சுயமானவைகளே. ஆகவே தடுப்பு ஊசியும் தற்காப்பும் சுயமானவை.

எடுத்துக்காட்டு 2

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டில் $(\alpha\beta) = 120$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. α மற்றும் β என்ற இரண்டும் சுயமான வைகளா எனக் காண்க.

α மற்றும் β சுயமானவைகளா என்று கணிப்பதற்கு முன்னால் (α) மற்றும் (β) யின் மதிப்புக் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} (A) + (\alpha) &= N \\ \therefore \alpha &= N - (A) \\ &= 300 - 100 = 200 \end{aligned}$$

இதுபோன்று (β) மதிப்பும் காணலாம்.

$$\begin{aligned} (B) + (\beta) &= N \\ \therefore (\beta) &= N - (B) \\ &= 300 - 120 \\ &= 180. \end{aligned}$$

பின்னர் கீழேயுள்ள சமன்பாடு உருவாகின்றதா என்று காண்போம்:

$$(\alpha\beta) = \frac{(\alpha)(\beta)}{N} = \frac{200 \times 180}{300} = 120.$$

எனவே, α மற்றும் β என்பவைகள் சுயமானவைகளே. நோய் தாக்குதலும் ஊசி போடாமையும் சுயமானவைகளே.

இணைப் பட்டியல் (Contingency table)

A மற்றும் B என்ற இரு பண்புகளைக் கொடுத்தால், இப் பண்புகளின் நேர்பிரிவு, எதிர்ப்பிரிவு கடைநிலைப் பிரிவுகளின்

அலைவெண்களைக் கீழே கொடுத்துள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கலாம். இவ்வட்டவணை இணை அட்டவணை அல்லது இணைப் பட்டியல் எனப்படும்.

	A	α	மொத்தம்
B	(AB)	$(B\alpha)$	(B)
β	$(A\beta)$	$(\alpha\beta)$	(β)
மொத்தம்	(A)	(α)	N

இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில்,

1. $(A) = (AB) + (A\beta)$
2. $(\alpha) = (B\alpha) + (\alpha\beta)$
3. $(B) = (AB) + (B\alpha)$
4. $(\beta) = (A\beta) + (\alpha\beta)$
5. $N = (A) + (\alpha) = (B + \beta)$
$= (AB) + (A\beta) + (B\alpha) + (\alpha\beta)$

மேலே உள்ள தொடர்புகளிலிருந்து கொடுக்கப்பெறாத அலை வெண்ணைக் கணிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

கொடுத்துள்ள விவரங்களிலிருந்து கொடுக்கப்படாத அலை வெண்ணைக் காண்க.

$(A) = 185$; $(B) = 175$; $(AB) = 125$; $N = 310$

கொடுக்கப்படாத அலைவெண்களாவன (α), (β), $(A\beta)$, $(B\alpha)$ மற்றும் $(\alpha\beta)$

நமக்குக் கீழேயுள்ள சமன்பாடுகள் தெரிந்ததே.

(i) $(A) + (\alpha) = N$.

$\therefore (\alpha) = 310 - 185$

$= 125$.

(ii) $(B) + (\beta) = N$

$\therefore (\beta) = N - (B)$

$= 310 - 175$

$= 135.$

(iii) $(AB) + (A\beta) = (A)$

$\therefore (A\beta) = (A) - (AB)$

$= 185 - 125$

$= 60.$

(iv) $(AB) + (B\alpha) = (B)$

$\therefore (B\alpha) = (B) - (AB)$

$= 175 - 125$

$= 50.$

கணித்த விவரங்களின் அடிப்படையில் கீழே கொடுத்துள்ள இணைப்பட்டியலை அமைக்கலாம்;

	A	α	மொத்தம்
B	(AB) 125	(Bα) 50	(B) 175
β	(Aβ) 60	(αβ) 75	(β) 135
மொத்தம்	(A) 185	(α) 125	(N) 310

சேர்க்கையும், சேர்க்கை இன்மையும்

A மற்றும் B என்ற இரு பண்புகள் சுயமானவையாக இருந்தால் கீழேயுள்ள சமன்பாடு உருவாகும் எனக் கண்டோம்.

$$(AB) = \frac{(A)(B)}{N}$$

இச் சமன்பாடு இல்லாதிருந்தால் Aயும் Bயும் சுயமானவை அல்ல. வேறு விதமாகக்கூறின் Aயும் Bயும் தொடர்புடையவை அல்லது சேர்க்கையுடையவை எனப்படும்.

(AB) என்பவை $\frac{(A)\ (B)}{N}$ என்பதைவிடக் கூடுதலாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருக்கலாம். சேர்க்கை நேராகவோ அல்லது எதிராகவோ இருக்கலாம். $(AB) > \frac{(A)\ (B)}{N}$ என்றிருந்தால் அல்லது $AB - \frac{(A)\ (B)}{N}$ என்பது ஒரு நேரளவாக இருந்தால் Aயும் Bயும் நேர் தொடர்புடையன அல்லது, சுருக்கமாக, சேர்க்கையுடையன எனக் கூறலாம். மாறாக,

$(AB) < \frac{(A)\ (B)}{N}$ என்றிருந்தால் அல்லது $(AB) - \frac{(A)\ (B)}{N}$ ஒரு எதிரளவாக இருந்தால் Aயும் Bயும் எதிர்ச் சேர்க்கை உடையன அல்லது, சேர்க்கையின்மையுன எனக் கூறலாம். எனவே $(AB) - \frac{(A)\ (B)}{N}$ என்ற அளவை ஓர் அளவுமானியாக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

1. $(AB) - \frac{(A)\ (B)}{N} = 0$
   என்றிருந்தால் Aயும் Bயும் சுயமானவை.

2. $(AB) - \frac{(A)\ (B)}{N} =$ நேரளவு (+ve)
   என்றிருந்தால் Aயும் Bயும் சேர்க்கை உடையன.

3. $(AB) - \frac{(A)\ (B)}{N} =$ எதிரளவு (—ve)
   என்றிருந்தால் Aயும் Bயும் சேர்க்கையின்மையன எனலாம்.

எனினும் $(AB) - \frac{(A)\ (B)}{N}$ என்பவற்றைச் சுருக்கிக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம் :

$$(AB) - \frac{(A)\ (B)}{N} = \frac{1}{N}\left\{(AB)N - (A)\ (B)\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\left\{\begin{array}{l}(AB)[(AB)+(A\beta)+(B\alpha)+(\alpha\beta)] \\ \quad -[(AB)+(A\beta)]\ [(AB)+(B\alpha)]\end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\left\{(AB)\ (\alpha\beta) - (A\beta)\ (B\alpha)\right\}$$

எனவே

1. $(AB)\ (\alpha\beta) - (A\beta)\ (B\alpha) = 0$
   A யும் B யும் சுயமானவை.

2. $(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(B\alpha)$ = நேரளவு (+ ve)

   A யும் B யும் சேர்க்கையுடையன.

3. $(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(B\alpha)$ = எதிரளவு (— ve)

   A யும் B யும் தொடர்பற்றன.

$(AB)(\alpha\beta)$ என்பன மூலைப் பிரிவுகளின் அலைவெண்களின் பெருக்கற் பலன் என அறிவோம். இதுபோன்று $(A\beta)(B\alpha)$ என்பனவும், இணைப் பட்டியலில் மூலைப்பிரிவு அலைவெண்களின் பெருக்கற் பலன் என அறிவோம். மேலும் $(AB)(\alpha\beta)$ முரண்பிரிவு அலைவெண்களின் பெருக்கற் பலன் என்றறிவோம். இதுபோன்றே, $(A\beta)(B\alpha)$ என்பனவும் இணை முரண் பிரிவுகளின் பெருக்கற் பலன் எனத் தெரியும்.

எனவே இரு பண்புகளின் தனித்துவம், சேர்க்கை, சேர்க்கையின்மை என்ற நிலையை இரு இணை முரண் பிரிவுகளின் பெருக்கற் பலன்களின் வேறுபாட்டின் அடிப்படையில் உறுதிப்படுத்தலாம்.

சேர்க்கைத் துணை அளவு (Co-efficient of Association)

இரு பிரிவுகளில் A, B என்ற பண்புகள் சேர்க்கையின் ஆழத்தை ஒப்பிடுவதற்கு 'யூல்' என்பவர் கீழேயுள்ள சேர்க்கைக்கெழுவளவைக் கொடுத்துள்ளார். இது 'Q' எனக் குறிப்பிடப்படும்.

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(B\alpha)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(B\alpha)}$$

$$Q = \frac{\text{இணை முரண் பிரிவுகளின் பெருக்கற் பலன்களின் வேறுபாடு}}{\text{இணை முரண் பிரிவு பெருக்கற் பலன்களின் கூட்டு}}$$

Q = 0 எனில் A, B சுயமானவை:

$(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(B\alpha) = 0$ எனில்

A யும் B யும் சுயமானவை.

Q வின் அளவு நேராக இருந்தால், A யும் B யும் சேர்க்கை உடையவை எனவும்,

Q வின் அளவு எதிராக இருந்தால் A யும் B யும் சேர்க்கையின்மையன எனவும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழே கொடுத்துள்ள விவரத்திற்குக் கூட்டுக்கெழுவெண் காண்க.

	A	α	மொத்தம்
B	80	10	90
β	40	20	60
மொத்தம்	120	30	150

$$Q = \frac{(AB)\,(\alpha\beta) - (A\beta)\,(B\alpha)}{(AB)\,(\alpha\beta) + (A\beta)\,(B\alpha)}$$

$$= \frac{80 \times 20 - 10 \times 40}{80 \times 20 + 10 \times 40}$$

$$= \frac{1600 - 400}{1600 + 400} = \frac{1200}{2000} = 0.6$$

இது நேர் தொடர்பைக் குறிக்கிறது.

பண்பின் சேர்க்கைக்கும், உடன் தொடர்புக்கும் உள்ள வேறுபாடு

இரு திரிபுகளின் உறவைப்பற்றி படிக்கும்போது, பண்புகளின் சேர்க்கையும், பண்புகளின் உடன் தொடர்பும் உபயோகமானவை. கொடுத்துள்ள திரிபுகள், அளவை நிலையில் (Quantitative nature) இருந்தால் இத் தொடர்பை உடன் தொடர்பு மூலம் ஆய்வு செய்யலாம். மாறாக இத்திரிபுகள், பண்பளவாக (Qualitative nature) இருந்தால் இத்தொடர்பைப் பண்பு சேர்க்கை மூலம் ஆய்வு செய்யலாம்.

பயிற்சி

1. பண்பு சேர்க்கைக்கெழு அல்லது கூட்டுறவுக்கெழு பற்றி விவரி.

காச நோயிலிருந்து கால் நடைகளைக் காப்பாற்றும் ஒரு பரிசோதனையில் கீழ்கண்ட முடிவுகள் பெறப்பட்டன.

	இறந்தவை	பாதிக்கப்படாதவை
தடுப்பு ஊசி போடப்பட்டவை	12	26
தடுப்பு ஊசி போடப்படாதவை	16	6

தடுப்பு ஊசிமூலம் காச நோய் எந்த அளவிற்குக் கட்டுப்படுத்தப்படுகிறது என்பதை ஆராய்க.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து தாய்க்கும் சேய்க்குமிடையேயுள்ள கண்ணின் நிறம் பற்றிய பண்பு சேர்க்கை பற்றி ஆராய்க.

கருமை நிறக் கண்ணுள்ள தாய்மார்கள் மற்றும் சேய்களின் எண்ணிக்கை ... 200

கருமை நிறமில்லாக் கண்ணுள்ள தாய்மார்கள் மற்றும் கருமை நிறக்கண்ணுள்ள சேய்கள் ... 360

கருமை நிறக் கண்ணுள்ள தாய்மார்கள் மற்றும் கருமை நிறமில்லாத கண்ணுள்ள சேய்கள் ... 320

கருமை நிறமில்லாக் கண்ணுள்ள தாய்மார்கள் மற்றும் சேய்கள் ... 3120

3. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் முரணற்றவையா என்று கண்டுபிடிக்க

$A = 25;$ $B = 20;$ $AB = 10;$ $N = 30$

4. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் A மற்றும் B என்ற பண்புகள் சார்பற்ற சுயமானவையா என்று கண்டுபிடிக்க.

$A = 30;$ $B = 6;$ $AB = 12;$ $N = 150$

அத்தியாயம் 6

விலக்கப்பாகுபாடும் சோதனைத் திட்டமும்

(Analysis of Variance and Design of Experiments)

முன்னர், வர்க்கமும், மூலவிலக்கமும் இரு பரவல்களை ஒப்பிட்டு ஆய்வதற்கான சிறந்த சிதறலளவுகள் எனப் படித்தோம். இவ்வதிகாரத்தில், இவ் அளவுகளை, அதிலும் குறிப்பாக, வர்க்க அளவை எவ்வாறு கையாளுவது என்பது குறித்துக் காண்போம். ஒரு தொகுதியிலுள்ள நபர்களின் மதிப்புகள், அல்லது ஒரு மாதிரியிலுள்ள நபர்களின் மதிப்புகள் ஒன்றுபோல் சமமாக இரா என்பது தெரிந்ததே. அவர்களிடையே வேற்றுமை இருப்பது இன்றியமையாதது. தனி நபருக்கான சராசரி வேறுபாட்டைக் கணிக்க, வர்க்கமும் மூல விலக்கமும் உள.

வெவ்வேறு நபர்களின் மதிப்பில் வேறுபாடு தோன்றுவதற்கு வெவ்வேறு காரணங்கள் இருக்கலாம். எனவே, காணப்படும் வேறுபாட்டில் ஒவ்வொரு காரணத்தின் பங்கும் எவ்வளவு என்பதைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியுளது. மேலும், ஒவ்வொரு காரணத்தினால் உண்டாகும் வேறுபாடு உண்மையிலேயே குறிப்பிடத்தக்கதா அல்லது நடைமுறையில் இயற்கையாக எழுவதா என்றும் கண்டுபிடிக்க வேண்டியுள்ளது. இத்தகைய விரிவான ஆய்வு, விலக்கப்பாகுபாடு எனப்படும். ஏனெனில் தோன்றுகின்ற மொத்த வேறுபாடு வெவ்வேறு காரணங்களின் அடிப்படையில் பகுக்கப்படுகின்றது.

இதை விரிவாக ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் காண்போம்.

மூன்று மாவட்டங்களில் நான்கு வித ரக நெல், ஒரே அளவு நிலப்பகுதியில் 'பயிர் அறுவடைச் சோதனையின்'கீழ் அறுவடை செய்து, கணித்துக் கிடைத்த மகசூலின் மதிப்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாவட்டங்கள்	ரகங்கள்			
	V_1	V_2	V_3	V4
D_1	20	25	22	21
D_2	23	26	25	22
D_3	26	27	28	23

மேலே கொடுத்துள்ள விவரங்களைக் கீழ்க் கண்டவாறு சுருக்கலாம் :

மாவட்டங்கள்	ரகங்கள்				மாவட்ட	மாவட்டச்
	V_1	V_2	V_3	V_4	மொத்தம்	சராசரி
D_1	20	25	22	21	88	22
D_2	23	26	25	22	96	24
D_3	26	27	28	23	104	26
ரகத்தின் மொத்தம்	69	78	75	66	288	
ரகத்தின் சராசரி	23	26	25	22		24

இங்கு 3 மாவட்டங்களும் 4 வித நெல் ரகங்களும் உள்ளன. ஒவ்வொரு வகை நெல்லும் 3 மாவட்டங்களிலிருந்து அறுவடை செய்யப்பட்டதால் ஒவ்வொரு ரகத்திற்கும் 3 விதமான மகசூல் அளவுகள் உள. இதுபோன்றே, ஒவ்வொரு மாவட்டத்திற்கும், ஒவ்வொரு ரகத்திற்கும் ஒன்று என்ற நிலையில் 4 மகசூல் மதிப்புகள் உள்ளன. 3 மாவட்டங்கள் D_1, D_2, D_3 என்ற எழுத்துகளாலும், 4 ரகங்கள் V_1, V_2, V_3, V_4 என்ற எழுத்துகளாலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன.

ஆரம்ப நிலையில் நாம் மாவட்டத்தையும் ரகத்தையும் மறந்து மாநிலத்தில் 12 சோதனைகளிலிருந்து கிடைத்த மகசூல் விவரமாகக் கருதுவோம்.

சராசரி ஒரு சோதனைக்குரிய வேறுபாட்டை (σ) மூலவிலக்கத்தை மரபு வழி காண்போம்.

மகசூல்

x	x^2
20	400
23	529
26	676

		x^2
	25	625
	26	676
	27	729
	22	484
	25	625
	28	784
	21	441
	22	484
	23	529
மொத்தம்	288	6982

சராசரி $= \bar{x} = \frac{288}{12} = 24$

$$\bar{x}^2 = 24 \times 24 = 576$$

வர்க்கம் $(V) = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{N}$

$$= \frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{6982}{12} - 576$$

$= 581\frac{10}{12} - 576 = 5\frac{10}{12} = 5\frac{5}{6}$ கிகி. (ஒரு பகுதிக்கு)

இது வேறுபாட்டின் சராசரி வர்க்கமாகும்.

எனவே, ஒருநிலத்திற்குரிய சராசரி வேறுபாடு

$\sigma = \sqrt{5\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{35}{6}} = 2.4$ கிகி. (ஒரு பகுதிக்கு)

மாவட்ட நிலையில் பகுப்பாய்வு

வேறுபாட்டின் வர்க்கத்தைப் பகுப்போம். இதற்காக மூன்று மாவட்டங்களை மாத்திரம் கவனிப்போம். இங்கு மூன்று மாவட்டங்கள் இருப்பதால், மாவட்டங்களிடையே உள்ள வேறுபாடும் மகசூலில் காணப்படும் வேறுபாட்டிற்கு ஒரு காரணமாகலாம்.

மாவட்டங்களில் ஏற்படும் வேறுபாட்டைக் கணித்து ஒப்பிட்டு ஆய்வு செய்வதற்கு மாவட்டங்களின் சராசரி மகசூல் அளவு களைக் கவனிக்கவேண்டும். மாவட்டங்களில் சராசரி மகசூல் முறையே 22, 24 மற்றும் 26 கிலோ கிராம் ஆகும்.

மாநிலச் சராசரி 24 கிகி. ஆகும். வழக்கம்போல் மாவட்ட சராசரிக்குரிய விலக்க வர்க்கம் காண்போம்.

மாவட்ட சராசரி

	$\bar{x}$	$\bar{x}^2$
	22	484
	24	576
	26	676
மொத்தம்	72	1736

சராசரி $\bar{\bar{x}} = 24$. $\bar{\bar{x}}^2 = 24 \times 24 = 576$.

$$V = \frac{\sum \bar{x}^2}{N} - \bar{\bar{x}}^2$$

$$= \frac{1736}{3} - 576$$

$$= 578\frac{2}{3} - 576 = 2\frac{2}{3}$$ கிகி. (ஒரு மாவட்டத்திற்கு)

மாவட்டங்களிடையே வேறுபாடு தோன்றிய போதிலும், ஒரு மாவட்டத்தினூடே மகசூல் ஒன்று போலவில்லை என அறி கின்றோம். மாவட்டங்களின் ஊடேயும் வேறுபாடு உள என்பது தெரிகிறது. மூன்று மாவட்டங்கள் இருப்பதால், மாவட்டங் களின் ஊடே உள்ள வேறுபாட்டை மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். மாதிரியில் தோன்றும் வேறுபாட்டை (1) மாவட்டங் களிடையே உள்ள வேறுபாடு (2) மாவட்டங்களினூடே உள்ள வேறுபாடு என இரு பிரிவாகப் பிரிக்கலாம்

ஒவ்வொரு மாவட்டத்திற்கும் ஊடே உள்ள வேறுபாட்டை அந்தந்த மாவட்டங்களின் சராசரி மகசூலுடன் ஒப்பிட்டு வேறு பாட்டைக் கணிக்கலாம்.

	மாவட்டம்-1 மகசூல்		மாவட்டம்-2 மகசூல்		மாவட்டம்-3 மகசூல்	
	x	x^2	x	x^2	x	x^2
	20	400	23	529	26	676
	25	625	26	676	27	729
	22	484	25	625	28	784
	21	441	22	484	23	529
மொத்தம்	88	1950	96	2314	104	2718

	மாவட்டம்-1	மாவட்டம்-2	மாவட்டம்-3
$\bar{x}$	$= 22$	24	26
$\bar{x}^2$	$= 484$	576	676
பாகுபாடு	$= \frac{1950}{4} - 484$	$\frac{2314}{4} - 576$	$\frac{2718}{4} - 676$
	$= 487\frac{2}{4} - 484$	$578\frac{2}{4} - 576$	$679\frac{2}{4} - 676$
	$= 3\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$

மூன்று மாவட்டங்களின் மொத்த வேறுபாடு

$$= 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$$

மாவட்டங்களின் சராசரி வேறுபாடு

$$= 9\frac{1}{2} \div 3 = \frac{19}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

கீழேயுள்ள இரு அளவுகளையும் கணித்துள்ளோம்.

1. மாவட்டங்களிடையேயுள்ள வேறுபாடு $= 2\frac{2}{3}$
2. மாவட்டங்களினூடேயுள்ள வேறுபாடு $= 3\frac{1}{6}$

மொத்தம் $= 5\frac{5}{6}$

இவ் அளவு, மாதிரியில் ஒரு சோதனைக்குரிய சராசரி விலக்க வர்க்கமாகும். இது ஏற்கனவே கணிக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, சராசரி விலக்க வர்க்கம் மாவட்டங்களிடையே உள்ள விலக்க வர்க்கத்திற்கும் மாவட்டங்களினூடேயுள்ள விலக்க வர்க்கத்திற்கும் உள்ள கூட்டுத் தொகை எனத் தெரிகிறது. எனவே, இவ்விரு விலக்க வர்க்கங்களில் ஏதாவது ஒன்று தெரிந்தால் அடுத்ததைக் கண்டு பிடிக்கலாம். பொதுவாக மாவட்டங்களினூடேயுள்ள வேறுபாடு சராசரி வேறுபாட்டிலிருந்து மாவட்டங்களினிடையேயுள்ள வேறுபாட்டைக் கழித்துக் கணிக்கப்படும்.

ரக நிலையில் பகுப்பாய்வு (Variety Approach) :

இப்பிரச்சினையை ரகங்களின் நிலையிலிருந்தும் ஆய்வு செய்யலாம். இதற்காக முதலில் ரகங்களின் சராசரி மகசூலிலிருந்து ரகங்களுக்கிடையே யுள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கத்தைக் காண வேண்டும்.

	ரகங்களின் சராசரி மகசூல் $\bar{y}$	$\bar{y}^2$
	23	529
	26	676
	25	625
	22	484
மொத்தம்	96	2314

சராசரி $\bar{\bar{y}} = 24, \quad \bar{\bar{y}}^2 = 576$

$$\text{வேறுபாட்டு வர்க்கம்} = \frac{\sum \bar{y}^2}{N} - \bar{\bar{y}}^2$$

$$= \frac{2314}{4} - 576$$

$$= 578\frac{2}{4} - 576$$

$$= 2\tfrac{1}{2}$$

மாவட்டங்களுக்குக் கணித்தது போன்று ரகங்களின் ஊடேயும் உள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கத்தைக் காணலாம். இதற்காக ஒவ்வொரு ரகத்தின் சராசரியுடன் அந்தந்த ரகத்தின் மகசூலை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டும்.

	ரகம் 1		ரகம் 2		ரகம் 3		ரகம் 4	
	y	y^2	y	y^2	y	y^2	y	y^2
	20	400	25	625	22	484	21	441
	23	529	26	676	25	625	22	484
	26	676	27	729	28	784	23	529
	69	1605	78	2030	75	1893	66	1454
சராசரி	$= \frac{69}{3}$		$\frac{78}{3}$		$\frac{75}{3}$		$\frac{66}{3}$	
$\bar{y}$	$= 23$		26		25		22	
$\bar{y}^2$	$= 529$		676		625		484	
	$\frac{1605}{3} - 529$		$\frac{2030}{3} - 676$		$\frac{1893}{3} - 625$		$\frac{1454}{3} - 484$	
	$535 - 529$		$676\frac{2}{3} - 676$		$631 - 625$		$484\frac{2}{3} - 484$	
	6		$\frac{2}{3}$		6		$\frac{2}{3}$	

4 ரகங்களின் மொத்த வர்க்கம்

$$= 6 + \frac{2}{3} + 6 + \frac{2}{3} = 13\frac{1}{3}$$

1 ரகத்தின் சராசரி வர்க்கம் $= 13\frac{1}{3} \div 4$

$$= \frac{40}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

ரகங்கள் நிலையில் ஆய்வு செய்யும் போது இரு வகையான வேறுபாட்டு வர்க்கங்கள் கீழ்கண்டவாறு கிடைக்கும்.

(1) ரகங்களுக்கிடையே உள்ள வர்க்கம் $2\frac{1}{2}$

(2) ரகங்களினூடே உள்ள வர்க்கம் $7\frac{1}{3}$

$5\frac{5}{6}$

இவ் அளவுதான் நாம் முன்பு மாதிரியில் சோதனைக்காக கணித்த சராசரி வேறுபாட்டு வர்க்கமாகும். முன்பு மாவட்டங்களின் ஊடேயுள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கத்திற்குக் கூறியது போன்று, ரகங்களின் ஊடேயுள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கம் மொத்த வேறுபாட்டு வர்க்கத்திலிருந்து ரகங்களின் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கத்தைக் கழித்து கணிக்கப்படுகிறது.

[கீழே கொடுத்துள்ள பகுதி பாடப் பகுதியாகக் கருதப் படவில்லை. எனினும் விருப்பமுள்ளோர் விருப்பிப் படித்தால் பயன் தரும்.]

மாவட்டத்தையும் ரகத்தையும் ஒருசேரக் கணித்தல்

மாவட்டத்தையும் ரகத்தையும் தனித்தனியே கவனியாது இரண்டையும் ஒருசேரக் கவனிக்கலாம். இம்முயற்சியில் முதலில் மாவட்டங்களிடையேயுள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கமும் ரகங்களுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கமும் கவனிக்கப் படும். இந்த இரண்டின் மொத்தம், மாதிரியில் உள்ள மொத்த வேறுபாட்டு வர்க்கத்திற்குச் சரியாகயிருக்க வேண்டும் என்று எதிர்பார்க்கப்படும்.

மாவட்டங்களினிடையேயுள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கம் $= 2\frac{2}{3}$

ரகங்களினிடையேயுள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கம் $= 2\frac{1}{2}$

மொத்தம் $= 5\frac{1}{6}$

இவ்விரண்டின் கூட்டு, முன்னர் கணித்த மொத்த வேறுபாட்டு வர்க்கத்திற்கு $\left(5\frac{5}{6}\right)$ சமமில்லை என்று தெரிகிறது. தோன்றும் குறைவு $\left(5\frac{5}{6} - 5\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$. இக் குறைவுக்குரிய சரியான காரணம் கொடுக்க முடிவதில்லை. சோதனையின்போது நம்மால் தடுத்து நிறுத்தமுடியாத அல்லது நமது கட்டுப்பாட்டிற்கு அப்பால் உள்ள காரணங்களால் நிகழ்ந்தது எனக் கூறலாம். மாவட்டங்களிடையேயுள்ள வேறுபாட்டிற்கு ரகங்கள் காரணமாகவும், ரகங்களினிடையேயுள்ள வேறுபாட்டிற்கு மாவட்டங்கள் காரணமாகவும் இருக்கலாம். எனவே மீதியுள்ள வேறுபாட்டிற்குரிய காரணம், மாவட்டம், ரகம் என்ற இரு காரணிகளின் கூட்டு வினை , என்வும் கூறலாம். அல்லது அவ்விரண்டின் எதிர் வினை என்றும் கூறலாம். பொதுவாக இது சோதனைக் குறையால் ஏற்பட்டது என்பர்.

எனவே மொத்த வேறுபாட்டு வர்க்கத்தை மூன்று பிரிவுகளாகக் கீழ்க்கண்டவாறு பகுக்கலாம்.

(1)	மாவட்டங்களிடையே வேறுபாட்டு வர்க்கம்	$= 2\frac{2}{3}$
(2)	ரகங்களிடையே வேறுபாட்டு வர்க்கம்	$= 2\frac{1}{2}$
(3)	மாவட்டம் மற்றும் ரகங்களின் எதிர்வினை	$= \frac{2}{3}$
	மொத்தம்	$= 5\frac{5}{6}$

பொதுவாக எதிர் வினை வேறுபாட்டு வர்க்கம், மொத்த வேறுபாட்டு வர்க்கத்திலிருந்து மற்ற இரு வேறுபாட்டு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கழித்தே கணிக்கப்படும்.

$$5\tfrac{5}{6} - (2\tfrac{2}{3} + 2\tfrac{1}{2}) = 5\tfrac{5}{6} - 5\tfrac{1}{6}$$
$$= \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3}.$$

சோதனைத் திட்ட அமைப்பு (Design of Experiment)

வேளாண்மையைப் பொறுத்தளவில், புது ரகமாயினும் அல்லது புது முறை சாகுபடியாயினும் அல்லது திருந்திய விதையாயினும் ஆராய்ச்சியாளர் தமது சோதனைகளை நிலத்திலேயே செய்ய வேண்டியுள்ளது. அவைகளின் பலன்களை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கு முன்னால், வயல்களில் விதைத்துப் பார்க்க

வேண்டும். இம்மாதிரி முயற்சிகள் மூலம் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பது செயல் முறை (Treatment) எனப்படும். ஒவ்வொரு செயல் முறையை வெவ்வேறு நிலத்திலோ அல்லது வெவ்வேறு துண்டு இடங்களிலோ முயற்சி செய்து பார்ப்பது ஒவ்வொரு முறையின் சிறப்பையும் உறுதியாக அறிந்துகொள்வதற்குப் போதுமான தன்று. ஒருவர் சமநிலையில் செயல் முறைகளைச் செய்த போதிலும், நிலத்திற்கே உரிய வேறுபாடு பெரிதாகத் தோன்று வதைக் காணலாம். எனவே, சோதனைகளை ஒரே நிலத்தில் அடுத்தடுத்து துண்டு நிலப்பகுதிகளில் முயன்று பார்ப்பது பயன் தருவதாகும். நிலவளத்தில் காணப்படும் வேற்றுமை குறித்து நல்லதோர் கருத்தை ஒரே *சீரான முயற்சிகள்* (Uniformity of Trials) மூலம் அறியலாம்.

சீரான செயல் முறைகள் (Uniformity of Trials)

ஒரு நிலத்தைப் பல கூறுகளாகப் பகுத்து, ஒரு குறிப்பிட்ட பயிரை ஒரே *சீரான* முறையில் பயிர் செய்து ஒவ்வொரு நிலப் பகுதியின் அல்லது கூறுகளின் மகசூலையும் தனித்தனியாகக் கணித்து ஆய்வு செய்வது *சீரான* செயல் முறையாகும். மகசூலின் அளவிலிருந்து நிலவள வேற்றுமை எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட திசையிலும் அதிகமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இல்லாதிருப்பதைக் காணலாம். மாறாக, நிலவளம் வயல் பூராவிலும் ஒழுங்கற்ற முறையில் பரந்திருப்பதைக் காணலாம். என்றாலும் அங்கங்கே ஒரே மாதிரி *சீரான* இடங்கள் சில இருப் பதையும் காணலாம். பொதுவாக மகசூலின் மூலவிலக்கம் நிலவள வேற்றுமையை எடுத்துக்காட்டும் குறியீடாகும்.

சோதனைக் குறை (Experimental Error)

சோதனைகளில், விதை, விதைக்கும் முறை, பயிரேற்று முறை என்ற இனங்களில் ஒரே மாதிரியான சீர்மைத் தன்மை யைக் கையாண்டபோதிலும், ஆராய்ச்சியாளரின் கட்டுப் பாட்டிற்கும் அப்பால் உள்ள சில காரணங்களும் இருக்கலாம். இத்தகைய கட்டு மீறிய காரணங்களால்தான் மகசூலின் மூலவிலக்கம் எடுத்துக்காட்டும் நில வளத்தின் இயற்கை வேற்றுமை ஏற்படுகிறது. இத்தகைய கட்டு மீறிய காரணங் களால் நிலக் கூறுகளிடையே தோன்றும் வேற்றுமை அல்லது வேறுபாடே சோதனைக்குறை எனப்படும்.

இவ்வாறு சோதனைக் குறைவால் தோன்றும் ஏற்ற இறக்கங் களால், அதற்குரிய சரியான பங்கை அளவிட ஆராய்ச்சியாளர்

ஒரு சோதனையைப் பலமுறை செய்ய வேண்டியுள்ளது. இவ்வாறு ஒரு சோதனையைப் பலமுறை செய்யும்போது, ஒரு முறை கணித்துக் கிடைத்த வேற்றுமை அளவு நிலையாகப் பல முறை வருவதாக யிருந்தால், வேற்றுமை உண்மையான வேற்றுமைதான் என்று ஏற்றுக் கொள்ளலாம். எனவே மகசூலில் காணப்படும் வேற்றுமை நிலவள வேற்றுமையால் மாத்திரம் தோன்றியதல்ல. செயல்முறைச் சோதனைகளைப் பல பகுதிகளில் மீண்டும் மீண்டும் செய்தபோது தோன்றும் வேறுபாடு, செயல் முறைகளுக்கே உரிய வேறுபாட்டினாலும், சோதனைக் குறையினாலும் தோன்றியதாக இருக்கலாம். செயல் முறையினால் உண்மையிலேயே வேறுபாடு இல்லாதபோதிலும் சோதனைக் குறையினாலே பெரிய பாதிப்பு ஏற்படலாம். எனவே சோதனைக் குறையில் ஏற்படும் வேறுபாட்டின் அளவைக் கணித்துச் செயல்முறை வேறுபாட்டுடன் ஒப்பிட்டு, செயல் முறை வேறுபாட்டின் பாதிப்பைக் கணிக்கவேண்டும்.

திரும்பச் செய்தல் (Replications)

ஆய்விலடங்கிய சோதனையைப் பலமுறை செய்துபார்ப்பது திரும்பச் செய்தல் எனப்படும். சோதனைக் குறைவினால் சோதனையின் பயன் பாதிக்கப்படாது பார்த்துக்கொள்ள வேண்டும். அதே நேரத்தில் சோதனைக் குறையையும் கட்டுப் படுத்த முடியாது எனவே சோதனையைப் பலமுறை திரும்பச் செய்து சோதனைக் குறையின் பாதிப்பைச் சம அளவில் பரவலாக்க வேண்டும். இம்முறை, மாதிரி முறைக்கு ஏற்புடைத்தாகும்.

சராசரியளவை நிலையுறுத்துவதற்கு மாத்திரமல்லாமல் செயல் முறைகளின் பலனை நல்ல முறையில் ஒப்பீடு செய்வதற்கும் சோதனை திரும்பச் செய்தல் தேவைப்படுகிறது. அடிப்படைக் காரணம் என்னவெனில் திரும்பச் செய்தலே சோதனைக் குறையை மதிப்பீடு செய்வதற்குரிய வழி ஆகும்.

எதேச்சையாக்கல் (Randomisation)

செயல் முறைகளை நல்ல முறையில் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டும். முறைகளை, செயல் முறைகளைப் பல்வேறு நிலக் கூறுகளிடையே ஒருவர் விருப்பம்போல் செய்து பார்க்காது, எதேச்சையாகச் செய்து பார்க்கவேண்டும். மேலும் ஒப்பிடுவதற் காகக் கையாண்ட புள்ளியியல் முறைகள் சரியானவைகளாக இருக்கவேண்டுமென்றால் நிலக்கூறுகளிடையே சோதனைகள் எதேச்சை முறையில் ஒதுக்கப்பட்டிருக்கவேண்டும்.

'திரும்பச் செய்தல்' முறை சூழ்நிலையால் எழும் வேறுபாடு சமமாகப் பரவச் செய்து அதன் காரணமாக வெவ் வேறு முறைகளில் உண்மையான சிறப்பை ஆய்வாளர் வெளிக் கொணர முயல்வதாகும். இதில் நிலக்கூறுகளை எவ்வாறு வரிசைப்படுத்துவது : என்பது அடங்கியுள்ளது. எதேச்சை முறையில் வெவ்வேறு சோதனைகளைப் பல முறை திரும்பச் செய்வதன்மூலம், எல்லாச் சோதனைகளும் ஒரே சமமான சூழ் நிலை பாதிப்புக்கு இலக்காகும்படிச் செய்யலாம்.

A, B, C மற்றும் D என்ற நான்கு வகையான செயல் முறைகள் உள்ளன] என எடுத்துக்கொள்வோம். எதேச்சை முறை என்பது ஓர் ஒழுங்கான முறையில் நிலக் கூறுகளை வரிசைப் படுத்துவதாகும். இத்தகைய வரிசைக்கும் பொதுவான ஓர்எடுத்துக்காட்டு, சதுரங்கப் பலகை (Chess Board) அமைப் பாகும். உதாரணமாகக் கீழே உள்ள அமைப்பைக் கருதலாம்.

A B C D
D A B C
C D A B
B C D A

இம்முறையில் எல்லாவிதச் சோதனைகளும் ஒவ்வொரு நேர் வரிசை மற்றும் நிரை வரிசையிலும் வந்துள்ளன. இம் முறையில் சரிந்த முறையில் இருக்கும் நிலவளத்தின் பாதிப்பு அகற்றப் பட்டுள்ளது. என்றாலும் 'AA' என்ற கர்ண நிலையைப் பார்த்தால், நிலவளம் 'A' என்ற சோதனைக்குச் சாதகமாக விருப்பதுபோல் தோன்றும்.

எதேச்சை முறையும் எல்லாச் சோதனைகளுக்கும் சூழ்நிலை பாதிப்பைச் சமமாகப் பங்கிடுவதில் உள்ள சிரமத்தைத் தவிர்க் காது. நடைமுறையில் எதேச்சை முறையில் ஏதாவது ஓர் ஒழுங்கான வரிசை உருவாகும். எதேச்சை முறையில் உள்ள பயன் என்னவெனில் வெவ்வேறு முறைகளிடையே காணப்படும் வேறுபாட்டின் நுண்மையைச் சோதிப்பதற்குச் சரியானதோர் அடிப்படையை அமைத்துத்தரும் என்பதே.

ஓரே அளவுடைய 20 நிலக்கூறுகள் உள்ளன எனக் கருதுவோம். ந[illegible]மிடையேயுள்ள A மற்றும் B என்ற இரு முறை களை எதேச்சை மு[illegible]யில் பரிசோதிப்பதாக வைத்துக்கொள் வோம்.

20 கூறுகளில் 10 கூறுகளை எதேச்சை முறையில் ஏதாவது ஒரு சோதனைக்காக ஒதுக்குவோம். கீழேயுள்ள 10 எதேச்சை எண்களும் A என்ற சோதனைக்காகத் தெரிந்தெடுக்கப் பட்டால், இவ்வெண்களுக்கிணையான வரிசை எண் கொண்ட நிலக்கூறுகளில் A என்ற சோதனையையும், மீதியுள்ள 10 நிலக்கூறுகளில் B என்ற சோதனையையும் நடத்துவோம். A மற்றும் B என்பவற்றின் நுண்மையைக் கிடைத்த மதிப்பிலிருந்து கணிக்கலாம்.

15, 19, 13, 3, 6, 1, 8, 20, 10, 11.

உட் கட்டுப்பாடு ! அல்லது சுய கட்டுப்பாடு (Local Control)

வெவ்வேறு நிலக்கூறுகளிடையே சோதனைகளை எதேச்சை மூலம் நடத்துவதால் சூழ்நிலை பாதிப்பு, தனி நபர் விருப்பு வெறுப்பு என்பவற்றை அகற்றி, நுண்மையை அறிவதற்குச் சரியானதொரு ஏதுவைத் தந்தபோதிலும் இது முற்றிலும் சிறந்த தொரு முறையாகாது. எனவே முடிந்தவரையில் நடைமுறையில் எதேச்சைத் தன்மையைக் குலைக்காது, சோதனைக் குறையைக் குறைப்பதுதான் வேண்டற்பாலது. அடுத்தடுத்த நிலக் கூறுகள் ஆங்காங்கே பரவலாக உள்ள நிலக்கூறுகளைவிட ஒரே சீரான நிலவளம் உடையது என்று முன்னர் சோதனைகளின்மூலம் கண்ட உண்மையின் அடிப்படையில் முன்னர் கூறிய நமது தேவையை ஒருவாறு நிறைவேற்றலாம். எனவே எல்லா 20 நிலக்கூறுகளிடையே முன்னர் கூறியது போன்று இரண்டு சோதனைகளை எதேச்சை முறைகளிலமைக்காது 20 நிலக்கூறுகளையும் இரண்டிரண்டு கூறுகளாலான 10 பகுதி களாகப் பிரிக்கவேண்டும். பிறகு ஒவ்வொரு பகுதியில் A மற்றும் B என்ற இரண்டு சோதனைகளை எதேச்சையாக நடத்தலாம். இம் முறையில், A மற்றும் B என்பவற்றிடையேயுள்ள வேறுபாடு, ஒவ்வொரு பகுதியிலும் உள்ள வேறுபாட்டிற்கு மாத்திரம் இலக் காகும். பொதுவாக இத்தகைய பகுதிகளில் எழும் வேறுபாடு, முழு நிலப் பரப்பில் எழும் வேறுபாட்டைவிடக் குறைவாக யிருக்கும்.

ஏனெனில், சோதனைக்குரிய வேறுபாடு ஒவ்வொரு பகுதியிலும் உள்ள கூறுகளிடையேயுள்ள வேறுபாட்டினால் மாத்திரம் பாதிக்கப்படும். பொதுவாக முழுப்பரப்பில் கூறு களிடையே எழும் வேறுபாட்டைவிடப் பகுதிகளின் கூறுகளிடை யேயுள்ள வேறுபாடு குறைவாக யிருக்கும்.

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட சோதனைகள் இருந்தபோதிலும் இப்பகுதியைப் பயன்படுத்தலாம். ஒவ்வொரு பகுதியையும் சோதனைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமான எண்ணிக்கையில் அடுத்தடுத்து அமைந்த கூறுகள் கொண்ட பகுதிகளாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். ஒவ்வொரு பகுதியிலும் உள்ள நிலக் கூறுகளிடையே சோதனைகளை எதேச்சை முறையில் ஒதுக்கவேண்டும். இத்தகைய முறையே எதேச்சை முறைப் பகுதி (Randomnised Block) எனப்படும்.

நிலக் கூறுகளிடையேயுள்ள அதிக ஒருமைப்பாட்டைப் பயன்படுத்திச் சோதனைக் குறையின் அளவைக் குறைப்பதே உட் கட்டுப்பாடு அல்லது சுய கட்டுப்பாடு எனப்படும்.

சோதனைத் திட்டம் (Experimental Design)

பல்வேறு தேவைகளுக்கும் ஏற்ற பல விதமான நிலக் கூறு அமைப்புகள் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன. இதுவே சோதனைத் திட்டம் என்று அழைக்கப்படும். இதிலடங்கிய கருத்தெல்லாம் ஒன்று போன்றதே. எதேச்சை முறை மற்றும் திரும்பச் செய்தல் முறைகளால் பழுதற்ற முறையில் சோதனைப் பலன்களை அவைகளின் மூலக்குறையுடன் ஒப்பிடுவதற்கும் திரும்பச் செய்தல், சுய கட்டுப்பாடு முறைகளால் குறைகளை குறைப்பதற்கும் இது அமைகிறது.

எதேச்சைப் பகுதிகள் (Randomised Blocks) :

முன்னர் கூறிய கருத்துகளின் அடிப்படையில் நிலப் பகுதியில் நடத்தும் சோதனை முறையே எதேச்சைப் பகுதி எனப் படும். இச் சோதனை முறை பெருவாரியாகக் கையாளப்படு கிறது. இம்முறையில் பல சோதனைகளையும் முயன்று பார்க்க லாம்.

இதற்காக சோதனைக்கான வயலை, எத்தனை முறை சோதனைகளைத் திரும்பச் செய்யவேண்டுமோ அத்தனை வகுப்புகளாக, உருவம் மற்றும் அளவு ஒன்றுபோன்ற இனங்களில் சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கவேண்டும். பின்னர் ஒவ்வொரு பகுதியையும் எத்தனைச் சோதனைகள் உண்டோ அத்தனை சம பரப்பும் உருவமும் கொண்ட கூறுகளாகப் பிரிக்கவேண்டும். நமக்கு 'r' முறையும் 't' சோதனைகளும் நடத்த வேண்டியிருந்தால், மொத்தம் r பகுதியும் பின்னர் ஒவ்வொரு பகுதியில் t கூறுகள் என்ற முறையில் மொத்தம் 'tr

கூறுகள் கொண்டதாக வயலைப் பிரிக்கவேண்டும். ஒவ்வொரு பகுதியிலும் உள்ள கூறுகளிடையே எதேச்சை எண்கள் மூல மாக சோதனைகளை ஒதுக்கவேண்டும். ' tr ' கூறுகளிலிருந்து கிடைத்த ' tr ' மகசூல் மதிப்புகள் சோதனைகளை ஒப்பிடுவதற் கான விவரங்களாகும்.

நமக்கு 8 சோதனைகளும், 6 முறை சோதனைகளும் நடத்த வேண்டுமென்றிருந்தால் கீழே உள்ள அமைப்பு அதற்கான அமைப்புகளில் ஒன்றாகும்.

I	II	III	IV	V	VI
4	6	3	2	4	2
6	2	8	3	7	7
3	3	2	7	6	6
8	7	4	6	2	5
7	5	7	5	8	3
5	8	1	1	3	1
1	1	5	8	1	8
2	4	6	4	5	4

கொடுத்துள்ள எண்கள் எதேச்சை எண்களே; எனவே இவ்வெதேச்சை எண்களுக்கு ஏற்ற சோதனைகளை ஒதுக்க வேண்டும்.

சோதனைகளின் அலைவெண் (Number of Replications)

நுண்மை, துல்லியம் என்பவற்றின் காரணமாக எத்தனை முறை சோதனைகளை மீண்டும் மீண்டும் செய்யவேண்டுமென் பதில் மிகுந்த கவனம் தேவை.

பயிற்சி

1. விலக்கப் பாகுபாடு பற்றி விளக்குக.
2. காரணிகளின் இடையே உள்ள வேறுபாடு அல்லது விலக்கம் மற்றும் ஊடே உள்ள வேறுபாடு அல்லது விலக்கம் பற்றி குறிப்பு வரைக.

3. வேறுபாட்டைப் பல்வேறு கூறுகளிடையில் பாகுபாடு செய்து விளக்குக.

(i)

மாவட்டம்	ரகம்		
	V_1	V_2	V_3
D_1	40	50	60
D_2	60	70	80
D_3	50	60	70

(ii)

ரகம்	செயல்முறை				
	T_1	T_2	T_3	T_4	மொத்தம்
V_1	25	30	45	40	140
V_2	35	45	25	35	140
V_3	30	40	40	50	160
V_4	50	45	50	55	200
மொத்தம்	140	160	160	180	640

அத்தியாயம் 7

காலத் தொடர் வரிசை

(Time Series)

எண்ணிக்கையளவில் கொடுக்கக்கூடிய பொருள்களின் மதிப்பு, என்றும் ஒரே நிலையில் இருப்பதில்லை என்பது தெரிந்ததே. காலந்தோறும் அளவு வேறுபடும். இங்கு காலம் என்று குறிப்பிடும்போது ஒரு நீண்டகால அளவைக் குறிக்குமே யல்லாது குறுகிய கால அளவைக் குறிக்காது. அளவில் ஏற்படும் மாற்றம் பல காரணங்களால் இருக்கலாம். வேறுபாட்டின் காரணங்கள் பல வகையாக இருப்பதால் வேறுபாட்டின் தன்மையும் அல்லது வேறுபாட்டின் வகையும் வெவ்வேறாக இருக்கும். நமக்குத் தேவைப்படுவது வேறுபாட்டின் தன்மையும், வெவ்வேறு காரணங்களால் ஏற்படும் வேறுபாட்டின் அளவு மாகும். மேலும், வெவ்வேறு காரணங்களால் ஏற்படும் வேறு பாட்டை நீக்கவும், வருங்காலத்தில் நிலவும் அளவை முன்கூட்டி அறிவிப்பதும் ஆகும். இத்தகைய ஆய்விற்கு நீண்ட காலங் களுக்கான விவரங்கள் தேவை; அல்லது நீண்ட காலத் தொடர்புக்கான விவரங்கள் தேவை. இத்தகைய பல்வேறு காரணங்களுக்கான விவரங்களைப் பற்றிப் படிப்பது காலத் தொடர் பகுப்பாய்வு (Analysis of Time Series) எனப்படும்.

காலத் தொடர் வரிசையில் உள்ள ஏற்ற இறக்கம் (Movements in Time Series)

பொதுவாக வேறுபாட்டை 4 பெரும் பிரிவுகளாகப் பகுக்க லாம். அவை 1. போக்கு (Trend—T) 2. பருவம் (Seasonal—S) 3. சுழல் (Cyclic—C) 4. ஒழுங்கீனம் (Irregular—I) என்பனவாகும். மேலும், இந் நால்வகை வேறு பாடுகளும் கூட்டு முறையிலோ அல்லது பெருக்கல் முறையிலோ இணைத்து காலத் தொடர் வரிசையை உருவாக்கலாம். இத் தகைய நிலையில் கீழேயுள்ள விதிமுறையைப் பயன்படுத்த லாம்

1. கூட்டல் முறை காலத் தொடர் : T + S + C + I

2. பெருக்கல் முறை காலத் தொடர் : T × S × C × I

எனவே எத்தகைய முறையில் வேறுபாடுகள் இணைந்து காலத் தொடர் வரிசை உருவாகியது என்றும், சில வேறுபாடு களின் அளவும் தெரிந்தால் எஞ்சியுள்ள வேறுபாடுகளின் அளவைக் கழித்தோ அல்லது வகுத்தோ கணிக்கலாம்.

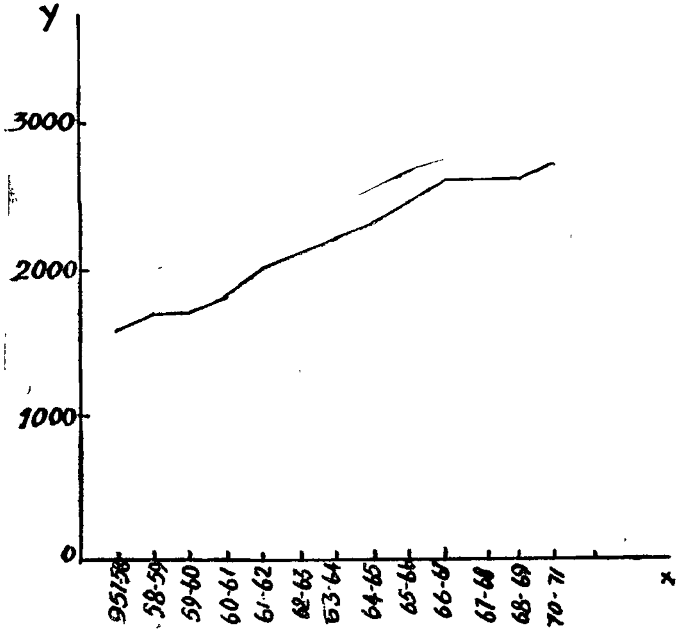
சார்பற்ற நேர் போக்கு (Secular Trend)

காலப் போக்கில் சில பொருள்களின் மதிப்பு வேறுபடலாம். ஒரு நாட்டின் மக்கள் தொகையை எடுத்துக் கொள்வோம். நாட்டின் நிலப்பரப்பளவில் வேறுபாடு இல்லாதபோதிலும் அதன் மக்கள் தொகை காலப்போக்கில் மாறுபடலாம். நாட்டின் மக்கள் தொகை அதிகரிப்பால் மக்களின் நுகர் பொருள்களின் தேவையும் அதிகரிக்கலாம், இதன் காரணமாக விவசாய உற்பத்தியும், தொழில் துறை உற்பத்தியும் அதிகரிக்கலாம். இவ்வாறு பொருள்களின் மதிப்பில் காலப் போக்கில் ஏற்படும் மாற்றம் ' போக்கு ' எனப்படும்.

அட்டவணை 1

ஆண்டு	மக்கள் (மில்லியன்)
1957—58	1574
1958—59	1687
1959—60	1737
1960—61	1807
1961—62	1960
1962—63	2099
1963—64	2228
1964—65	2308
1965—66	2450
1966—67	2580
1967—68	2582
1968—69	2613
1969—70	2665

ஒரு நாட்டு மக்கள் தொகையின் மரணத்தைக் கவனித்தால் மரண விகிதம், அதிக மருத்துவ வசதி மற்றும் புதுக் கண்டுபிடிப்புகள் காரணமாகவும் குறையலாம்.



படம் 7—1.

அட்டவணை 2

ஆண்டு	இறப்பு விகிதம் (ஆயிரம் பேருக்கு)
1951	17.1
1952	16.0
1953	17.2
1954	14.0
1955	11 3
1956	13.6
1957	14.2
1958	13.1
1959	11.9
1961	12.1
1960	13.3
1962	11.3
1963	11.3
1964	10.8
1965	11.5
1966	11.0
1967	10 5
1968	8.7
1969	8.4
1970	8.2
1971	7.8



படம் 7—2.

பொருள்களின் மதிப்புகள் இவ்வாறு பல்வேறு காரணங்களால் வேறுபட்டுச் செல்லும் தன்மை உடையன என்பதைக் காட்டும். இத்தகைய வேறுபாடே 'போக்கு' எனப்படும்.

பருவ மாற்றம் (Seasonal Variation)

குறிப்பிட்ட கால மாற்றம் (Periodic Movement)

குறிப்பிட்ட கால மாற்றம் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட காலந் தோறும் மீண்டும் மீண்டும் ஓர் ஒழுங்கான நியதியில் வரும் என்று பொருள்படும். பொதுவாக ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியிலோ அல்லது ஓர் ஆண்டில் குறிப்பிட்ட பருவத்திலோ நிகழும் மாற்றம் பருவ மாற்றம் எனப்படும். ஒரு நாட்டில் பெய்யும் மழை இவ்வித பருவ மாற்றத்திற்கு உள்ளாகும். இது போன்றே, வேளாண்மைப் பொருள்களின் விலையும் அறுவடைக் காலத்தில் குறைந்தும், மற்ற காலத்தில் அதிகரித்தும் காணப்படும். இதுபோன்றே துணிகளின் விற்பனை அக்டோபர், ஜனவரி மாதப் பண்டிகைகளின்போது அதிகமாக இருக்கும். மழையைப் பொறுத்தளவில் இயற்கை, பருவ மாற்றத்திற்கு ஏதுவாக மாறலாம். வங்கிகளின் பணி, விடுமுறை

நாட்களை அடுத்த வேலை நாட்களில் அதிகமாக இருக்கும். எல்லா அலுவலகங்களிலும் இதர நிலையங்களிலும் மாத முதல் தேதியில் சம்பளம் பட்டுவாடா ஆவதால் மாத முதல் வாரத்தில் வியாபார நிலையங்களில் விற்பனை அதிகமாக இருக்கும்.

சுழல் மாற்றம் (Cyclic Movement)

இத்தகைய மாற்றங்கள் பருவ மாற்றத்திலிருந்து வேறுபட்டவை. ஓர் ஆண்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளிக் காலத்தில் பருவ மாற்றங்கள் தோன்றும். ஆனால் சுழல் மாற்றங்கள் பத்தோ அல்லது பதினைந்தோ ஆண்டுகள் என்ற நீண்ட இடைவெளிக்குப்பின் மீண்டும் தோன்றலாம். என்றாலும், சுழல் மாற்றத்தின் தோற்றத்தில் ஓர் ஒழுங்கான நியதி இராது. இத்தகைய மாற்றங்கள் வியாபார வட்டாரங்களில் காணப்படும். இத்தகைய மாற்றங்கள் சில துறைகளில் ஏற்படும் திடீர் மாற்றங்களாலோ அல்லது சங்கிலித் தொடர் போல் ஏற்படும் காரணங்களாலோ உண்டாகலாம். எடுத்துக் காட்டாக ஒரு நாட்டில் உண்டாகும் நாணய மதிப்பு வீழ்ச்சி இன்னொரு நாட்டின் நாணய மதிப்பு வீழ்ச்சியை உண்டாக்கலாம்.

ஒழுங்கீன மாற்றம் (Irregular Movement)

முன்னர் கூறாத மாற்றங்களைத் தவிர இதர மாற்றங்கள் யாவும், ஒழுங்கீன மாற்றம் எனப்படும். ஏனெனில் அவற்றின் தோற்றத்தில் ஓர் ஒழுங்கான நியதி இருப்பதில்லை. அவை திடீரென (Accidental) ஏற்படலாம் அல்லது நிகழ்ச்சிகளாக (Episode) இருக்கலாம். ஒரு நாட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் தோன்றும் அதிகமான மரண விகிதம், திடீரெனத் தோன்றும் கொள்ளை நோய் காரணமாகவும், அல்லது போரினாலும், புயல், சூறாவளி, நில நடுக்கம் போன்ற இயற்கை விபரீதங்களாலும் தோன்றலாம். எனவே, இத்தகைய மாற்றங்களை முன்கூட்டி அறிந்து அளவிடுவது முடியாததாகும்.

காலத் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு (Analysis of Time Series)

போக்கின் மதிப்பைக் கீழேயுள்ள முறைகளில் ஏதாவது ஒன்றினால் அளவிடலாம்.

(1) எளிய வளைகோட்டு முறை (Free Hand Curve Method)

(2) நகரும் சராசரி முறை (Moving Average Method)
(3) குறைந்த வர்க்க முறை (Method of Least Square)

சார்பற்ற போக்கு முறை கணிப்பு

எளிய வளைகோட்டு முறை (Free Hand Curve Method)

காலத் தொடர் வரிசை விவரங்களை ஒரு வரைபடத்தாளில், காலத்தை x-அச்சிலும் விவரத்தை y-அச்சிலும் குறிப்பிடலாம். பின்னர் விவரங்களுக்கான ஒரு வளைகோடு கிடைக்கும். இந்த வளைகோட்டில் சில குறிப்பிட்ட காலங்களில் சில குறிப்பிட்ட ஏற்ற இறக்கங்களைக் காணலாம். இவ்வேற்ற இறக்கங்களைக் கவனியாது ஓர் ஒழுங்கான எளிய கோட்டை அநேக புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுமாறு வரையலாம். புதிதாக உருவாகும் இந்த வளைகோட்டில் ஏற்ற இறக்கம் இருக்காது. இத்தகைய கோடு விவரங்களில் தோன்றும் போக்கை விளக்குவதாகும். இம் முறை எளிய வளைகோட்டு முறை எனப்படும்.

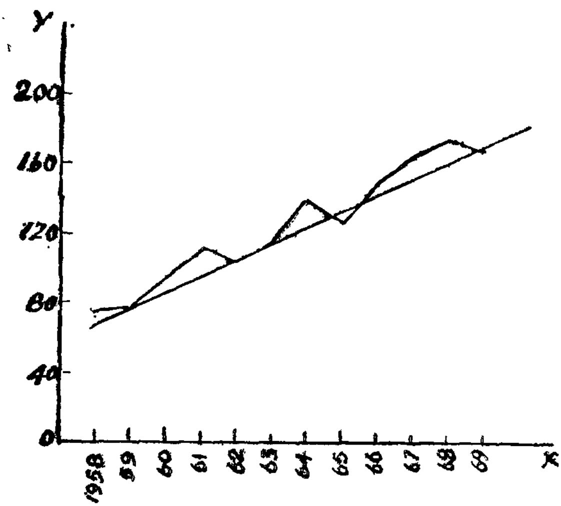
இவ் வளைகோட்டிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கான மதிப்பைக் கணிக்கலாம். இத்தகைய கணித்துக் கிடைக்கும் மதிப்பு 'கணித்த மதிப்பு' (computed value) என்றும் தொடர் வரிசையில் கண்ட விவர மதிப்பு 'கண்ட அளவு' (observed value) என்றும் அழைக்கப்படும். கண்ட அளவிற்கும் கணித்த அளவிற்குமிடையே சிறு சிறு வேறுபாடுகள் தோன்றியபோதும் வேறுபாட்டின் மொத்த மதிப்பு சூன்யமாக இருக்குமாறு ஒரு வளைகோட்டை வரையலாம். இதை வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் சராசரியால் குறைந்த வர்க்க முறை மூலம் எளிதாக்கலாம். இது வேறுபாட்டு வர்க்கத்தின் சராசரி மிகக் குறைந்தது என்பதைக் காண்பிக்கும். குறைந்த வர்க்க முறை மூலம் இத் தொடர்பிற்கான ஒரு நியதியையும் கண்டு வளைகோட்டு பொருத்த முறையில் (Curve fitting) ஒரு வளைகோட்டைப் பொருத்திப் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழேயுள்ள எடுத்துக்காட்டைக் கவனிப்போம் :

ஆண்டு	உற்பத்தி (' 000 ' டன்)
1958	75
1959	78
1960	95

ஆண்டு	உற்பத்தி ('000' டன்)
1961	112
1962	105
1963	115
1964	140
1965	128
1966	150
1967	165
1968	175
1969	170



படம் 7—3.

மேலேயுள்ள விவரங்களுக்கு எளிய வரைகோட்டு முறையில் ஒருபோக்கு வரைகோடு வரையலாம். முதலில் இவ் விவரங்களுக்கான புள்ளிகளைக் குறித்து, பிறகு விவரங்களுக்கான வரைகோட்டை வரையலாம். ஆண்டுகளை x-அச்சிலும் உற்பத்தி அளவுகளை y-அச்சிலும் குறிக்கலாம். எல்லாப் புள்ளிகளையும் குறித்த பின்னர் அவைகளை நேர்கோடு மூலம் இணைக்கலாம். இவ் வளைகோடே விவரங்களுக்கான வளைகோடு ஆகும்.

உயர்ந்த புள்ளியும், தாழ்ந்த புள்ளியும் போக்குக் கோட்டிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்குமாறு ஒரு நேர்கோடு வரையலாம். போக்குக் கோட்டின் புள்ளிகள், மதிப்புகளைப் பிரதிபலிக்கும். முன்னர் விளக்கியதுபோல், ஒரு பொருத்தமான போக்கைக் கணித்த பின்னர் ஒவ்வோர் ஆண்டிற்கும் உரிய போக்களவைக் கணிக்கலாம். ஒவ்வோர் ஆண்டிற்குரிய கொடுத்த அளவை, போக்களவால் வகுத்து, 100 கொண்டு பெருக்கலாம். இது மூல அளவை போக்களவின் சதவீதத்தில் கொடுக்கும்; போக்கையும் மாற்ற முடியும்.

போக்குக் கோட்டின் மேலேயுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளின் செங்குத்துத் தூரத்தின் மொத்த அளவு, போக்குக் கோட்டின் கீழேயுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளின் மொத்த செங்குத்து தூரத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்படிச் செய்வதால் போக்கை மாற்ற முடியும். ஒரு மாதாந்திர விவரகாலத் தொடர் வரிசை போக்கு, பருவ மாற்றம், சுழல் மாற்றம், ஒழுங்கீன மாற்றம் என்பனவற்றின் பெருக்குப் பலனாக இருக்கும் என்பதை உணரவேண்டும்.

இம்முறையின் நன்மைகள்

1. போக்கைக் கணிப்பதற்கு மிகவும் எளிய முறை.

2. விவரங்களை எளிதில் கண்டுபிடிக்கலாம். ஏனெனில் பெரிய கணிப்பு முறைகள் இதில் அடங்குவதில்லை. மற்றும் எளிதில் புரிந்துகொள்ளலாம்.

3. நேர் போக்கோ அல்லது வளைபோக்கோ உள்ள எல்லாவிதப் போக்குகளுக்கும் இதைப் பயன்படுத்தலாம்.

4. இம்முறை ஒழுங்கான, மற்றும் ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்க மாற்றங்களை அகற்றும். ஒரு குறிப்பிட்ட காலப்போக்கில் தோன்றும் அடிப்படைப் போக்கை விளக்கும்.

5. பொருளாதார நிலை குறித்துச் சரியான அறிவுடைய ஒரு அனுபவசாலி இம்முறையை எளிதாகவும், துல்லியமாகவும் கையாளலாம்.

குறைகள்

1. போக்கை மதிப்பிடுவதற்குரிய காட்சி முறை என்ற காரணத்தால் சரியாக முன்கூட்டிக் கணிப்பதற்கு இயலாது.

2. ஒரு குறிப்பிட்ட விதிமுறை இல்லாத காரணத்தால் ஆய்வாளரின் விருப்பு வெறுப்புக்கு வளைந்து கொடுக்கும் பழுதுடையதாக இருக்கும்.

3 இதற்குத் தனிப்பயிற்சியும் நல்ல அனுபவமும் தேவை.

4. இது ஓர் உத்தேசமானது.

நகரும் சராசரி முறை (Moving Average Method)

போக்கை அளவிட நகரும் சராசரி முறை ஓர் எளிய முறையாகும். இதன் பொருளையும் இதன் கணிப்பு முறையையும் ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழே கொடுத்துள்ள விவரம் வீட்டிற்கான மின் சக்தி உபயோக அளவைக் குறிக்கும்.

ஆண்டு	உபயோகித்த அளவு
1970	247
1971	273
1972	276
1973	316
1974	395
1975	469
1976	501

நகரும் சராசரி கணிப்பதற்காக நமது தேவையைப் பொறுத்து, மூன்றாண்டு காலத்தையோ அல்லது ஐந்தாண்டு காலத்தையோ அல்லது ஏழு ஆண்டு காலத்தையோ நாம் எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்கு நாம் 3 ஆண்டு கால நகரும் சராசரியைக் கணிப்போம். முதலில் 3 ஆண்டு விவரங்களைக் கூட்டிச் சராசரி கணிப்போம்.

$$1971\text{ன் சராசரி} = \frac{247 + 273 + 276}{3} = \frac{796}{3} = 265$$

பின்னர் 1970 ஐத் தவிர்த்து 1973 ஐச் சேர்த்து, 1971, 72, 73 ஆண்டுகளுக்கான சராசரியைக் கணிக்கலாம்.

$$1972\text{ ன் சராசரி} = \frac{273 + 276 + 316}{3} = \frac{865}{3} = 288$$

இவ்வாறு தாம் எல்லா விவரங்களையும் கையாளுகையில் சராசரியைக் கீழ்க் கண்டவாறு கணிக்கலாம்.

$$1973\text{ன் சராசரி} = \frac{276 + 316 + 395}{3} = \frac{987}{3} = 329$$

$$1974\text{ன் சராசரி} = \frac{316 + 395 + 469}{3} = \frac{1180}{3} = 393$$

$$1975\text{ன் சராசரி} = \frac{395 + 469 + 501}{3} = \frac{1365}{3} = 455$$

பொதுவாக நகரும் சராசரி, நகரும் மொத்த அளவிலிருந்து கணிக்கப்படும். இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

ஆண்டு	பயன்படுத்திய அளவு	3 ஆண்டுகளின் மொத்தம்	3 ஆண்டுகளின் நகரும் சராசரி
1970	247	—	—
1971	273	796	265
1972	276	865	288
1973	316	987	329
1974	395	1180	393
1975	469	1365	455
1976	501	—	—

இங்கு 3 ஆண்டு நகரும் சராசரியைக் கணிப்பதால் ஆரம்பத்திலுள்ள முதலாண்டிற்கும் கடைசியில் உள்ள இறுதியாண்டிற்கும் நகரும் சராசரி கிடையாது. ஐந்தாண்டு நகரும் சராசரியை எடுப்பதாக இருந்தால் முதலிரண்டாண்டுகட்கும் மற்றும் கடைசி இரண்டு ஆண்டுகட்கும் நகரும் சராசரி கிடையாது.

ஐந்தாண்டு நகரும் சராசரி

ஆண்டு	பயன்படுத்திய அளவு	5 ஆண்டு மொத்தம்	5 ஆண்டு நகரும் சராசரி
1970	247	—	—
1971	273	—	—
1972	276	1507	301
1973	316	1729	346
1974	395	1957	391
1975	469	—	—
1976	501	—	—

நகரும் சராசரியை மைய நிலைப்படுத்துதல் (Centering of Moving Average)

சில வேளைகளில் இரண்டாண்டு அல்லது நான்கு ஆண்டு நகரும் சராசரிகளைக் கணிப்பதுண்டு. அவ்வமயம், நகரும் மொத்தமும், நகரும் சராசரியும் இரண்டு இணை விவரங்களுக்கிடையே எழுதப்படும்; இது மிகவும் கடினமானது. ஏனெனில், நகரும் சராசரி ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டைப் பிரதிபலிக்காது. நடுவாண்டைப் பிரதிபலிக்கும். இச் சிரமத்திலிருந்து விடுபடுவதற்காகச் சராசரி ஆண்டோடு சரியாக ஒட்டிச் செல்லும் வண்ணம் ஒரு சிறு திருத்தம் செய்யப்படுவது உண்டு. இத்தகைய திருத்தமே நகரும் சராசரியை மைய நிலைப்படுத்தல் என்று அழைக்கப்படும்.

இவை கீழ்க் கண்டவாறு செய்யப்படும் :

ஆண்டு	உற்பத்தி	4 ஆண்டு நகரும் மொத்தம்	4 ஆண்டு நகரும் சராசரி	இரண்டு 4 ஆண்டு சராசரிகளின் மொத்தம்	4 ஆண்டு நகரும் சராசரியின் மையம்
1960	80				
1961	85				
		343	86		
1962	90			178	89
		368	92		
1963	88			188	94
		383	96		
1964	105			198	99
		408	102		
1965	100			212	106
		440	110		
1966	115			225	113
		460	115		
1967	120			234	117
		478	119		
1968	125			245	123
		503	126		
1969	118				
1970	140				

நகரும் சராசரியைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம் :

ஒரு காலத் தொடர் வரிசையில் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுடைய விவரங்களின் நகரும் சராசரி, காலத் தொடர் வரிசைகளிடையே ஒவ்வொரு முறையும் முன்பு கணித்த சராசரிக்கான முதல் அளவைத் தவிர்த்தும், பின்னர், கணிக்க வேண்டிய சராசரிக்கான முன்பு கருதிய அளவிற்கு அடுத்த அளவைச் சேர்த்தும் கணிக்கப்படும்.

எனவே, நகரும் சராசரி ஒரு செயற்கைக் கால வரிசைத் தொடராகக் கருதப்படும். இங்கு ஒவ்வோர் ஆண்டிற்குரிய மதிப் பிற்குப் பதிலாக அவ்வாண்டிற்கும் அதற்கு முன்பும் பின்புமுள்ள ஆண்டுகளின் விவரங்களுக்குமுள்ள சராசரி அளவினால் நிறை செய்யப்படும்.

சில சமயங்களில் ஒரு காலத் தொடர் வரிசையில் மாதாந்திர விவரங்கள் இருக்கலாம். இச் சந்தர்ப்பங்களில் பன்னிரண்டு மாத கால நகரும் சராசரியைப் பயன்படுத்தலாம். இத்தகைய பன்னிரண்டு மாத கால நகரும் சராசரிகளில் பருவ மாற்றம் அகற்றப்பட்டுவிடும். பன்னிரண்டு அல்லது 13 மாத கால அடிப்படையில் கணித்த நகரும் சராசரி அவ்வாண்டின் நடுவில் உள்ள மாதத்திற்கெதிரே எழுதப்படும். உண்மையில் போக்கு மற்றும் சுழல் மாற்றங்களின் ஓர் உத்தேச மதிப்பீடாகவே நகரும் சராசரி கருதப்படும். ஏனெனில் பருவ மாற்றமும், ஓரளவிற்கு ஒழுங்கீன மாற்றமும் இதில் அகற்றப்பட்டுவிடும். மூல விவரங்கள் நகரும் சராசரியால் (T × C) வகுக்கப்பட்டால் பருவ மாற்றம் மற்றும் ஒழுங்கீன மாற்றங்களின் மதிப்பீடு கிடைக்கப்பெறும்.

$$\text{வரிசை} = T \times C \times S \times I$$

$$S \times I = \frac{T \times C \times S \times I}{T \times C}$$

நகரும் சராசரியைக் கணிப்பதற்காகக் காலங்களைத் தேர்ந் தெடுப்பது ஒரு முக்கிய பிரச்சினையாகும். இதன் முக்கியக் குறிக் கோள் என்னவெனில் இதர மாற்றங்களால் பாதிக்காத அளவில் அல்லது மிகக் குறைந்த அளவில் பாதிக்குமாறு போக்களவைக் கண்டுபிடிப்பதாகும்.

நகரும் சராசரியின் நன்மைகள்

1. மதிப்புகளில் தோன்றும் ஏற்ற இறக்கங்களைக் கணிப்பதற்கும் மிக துல்லியமாகப் போக்கு அளவைக் கணிப்பதற்கும் எளிய முறையாகும்.
2. எளிய வளைகோட்டு முறையைப் போன்று தனி நபர் விருப்பு வெறுப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
3. சுழலின் காலத்தை நகரும் சராசரி கணிக்கும் காலமாகக் கருதும்போது சுழல் வேற்றுமையையும் அகற்றி விடலாம்.

குறைகள்

1. காலத்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் கவனம் தேவைப்படுவதால் பொருத்தமற்ற முறைகளால் உண்மையான போக்களவைப் பெறமுடியாது.
2. காலத் தொடர் வரிசை மிக நீண்டதாக இருக்குமானால் நகரும் சராசரி கணிப்பது மிகவும் சிரமமாகயிருக்கும்.
3. நகரும் சராசரி கூட்டுச் சராசரி அடிப்படையில் கணிக்கப்படுவதால், மிகக் கூடுதல் அல்லது மிகக் குறைந்த மதிப்புகளால் மிகவும் பாதிக்கப்படலாம்.
4. காலத் தொடர் வரிசையில் முதலில் உள்ள சில ஆண்டுகளுக்கும், கடைசியில் உள்ள சில ஆண்டுகளுக்கும் நகரும் சராசரி கணிக்க முடியாது. எனவே இதை முன் மதிப்பீட்டிற்குப் பயன்படுத்த முடியாது.

குறைந்த வர்க்க முறை (Method of Least Square)

குறைந்த வர்க்க முறை பெரும்பான்மையாக எங்கும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. போக்கு மதிப்புகளைக் கணிப்பதில் இது ஏராளமாகப் பயன்படுகிறது. குறைத்த வர்க்க முறை மூலம் ஒரு கணித உறவு நியதியை உருவாக்கலாம். மேலும் கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு ஏற்றதொரு கோட்டையும் பொருத்தலாம். உடன் தொடர்பு கோடுகளைப்பற்றிப் படிக்கும்போது இம்முறை பற்றி ஏற்கனவே படித்துள்ளோம். இம்முறை $y = mx + c$ என்ற முறையில் ஒரு நேர்கோட்டைக் கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்துவதற்கொப்பாகும். இங்கு 'm' என்பது x அச்சுடன் நேர் கோட்டிற்கான சரிவளவைக் குறிப்பதாகும். பொதுவாக இச் சரிவளவு திரிகோண tan அளவில்

கொடுக்கப்படும். 'c' என்பது y அச்சில் நேர் கோட்டால் வெட்டப்படும் துண்டின் அளவாகும்.

கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு நேர்கோட்டைப் பொருத்தல்

ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் ஆரம்ப 9 ஆண்டுகளின் உற்பத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
உற்பத்தி (y) (000 டன்)	25	30	28	35	42	40	47	49	55

இங்கு காலத்தை x என்றும் உற்பத்தியை y என்றும் குறிப்பிடுவோம். கணிப்பில் எழும் சிரமத்தைத் தவிப்பதற்காக, 5வது ஆண்டை ஆரம்பமாக அல்லது நடுவாண்டாக எடுத்துக் கொள்வோம். இதர ஆண்டுகளை இந்த நடுவாண்டின் விலக்க அளவில் கொடுத்து விவரங்களை மாற்றி அமைக்கலாம். இதர ஆண்டுகளை ஆரம்ப காலத்தின் அடிப்படையில் மாற்றியமைத்த பின்னர் x^2, xy என்ற மதிப்புகளையும் கீழேயுள்ள அட்டவணையிலுள்ளதுபோல் கொடுக்கலாம்.

x	y	x^2	xy	
−4	25	16	−100	
−3	30	9	−90	
−2	28	4	−56	−281
−1	35	1	−35	
0	42	0	—	
1	40	1	40	
2	47	4	94	
3	49	9	147	501
4	55	16	220	
0	351	60	220	

இங்கே கீழே உள்ள விவரங்கள் கணிக்கப்பட்டுள்ளன.

$n = 9.$

$\Sigma x = 0; \quad \Sigma y = 351; \quad \Sigma x^2 = 60; \quad \Sigma xy = 220.$

சமன்பாடு $y = mx + c$

இங்குள்ள விவரங்களைப் பொறுத்தளவில், m, c என்ற இரு அளவுகளும் நிலையானவை.

கீழே உள்ள முறைப்படி c யின் மதிப்பைக் கணிக்கலாம்.

$$c = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{351}{9} = 39.$$

'm' ன் மதிப்பையும் கீழேயுள்ள சமன்பாட்டின் மூலம் கணிக்கலாம்.

$$m = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{220}{60} = \frac{11}{3} = 3.67$$

எனவே, சமன்பாடு $y = 3.67x + 39$

நாம் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கும்போது ஆரம்ப காலத்தையும் குறித்தாக வேண்டும். இங்குள்ள நமது கணிப்பில் 5வது ஆண்டை ஆரம்ப ஆண்டாக எடுத்துள்ளோம். எனவே சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு எழுதப்படவேண்டும்.

$y = 3.67x + 39$

ஆரம்பம் 5வது ஆண்டு.

இதே எடுத்துக்காட்டைக் கீழ்க் கண்டவாறும் மாற்றலாம்.

ஆண்டு (x)	1961	62	63	64	65	66	67	68	69
உற்பத்தி (y)	25	30	28	35	42	40	47	49	55

இங்கு ஆண்டுகளைக் கண்டு கலவரம் அடைய வேண்டாம். இதில் 1965ம் ஆண்டை ஆரம்பமாகவும் இதர ஆண்டுகளை −4, −3, −2 −1, 0, 1, 2, 3, 4 எனவும் முன்போல் எடுத்துக் கொள்ளலாம் இம் முறையில் முன்னர் உள்ள அதே சமன்பாடே $y = 3.67x + 39$ கிடைக்கும். ஆரம்பம் 1965.

போக்களவு மதிப்பீடு (Estimation of Trend Value)

கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்திப் பார்ப்பதின் குறிக்கோள் போக்களவு கணிப்பதற்கே. இனி போக்களவைக் கணிப்போம்.

முறை எளியதே. கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் எந்த ஆண்டிற்கு y-ன் மதிப்பு வேண்டுமோ அவ்வாண்டின் x-ன் மதிப்பைக் கொடுத்துப் பார்க்கவேண்டும்.

சமன்பாடு $y = 3.67x + 39$

1961	$x = -4$	$\therefore y = 3.67 \times (-4) + 39 = 24.32$
1962	$x = -3$	$y = 3.67 \times (-3) + 39 = 27.99$
1963	$x = -2$	$y = 3.67 \times (-2) + 39 = 31.66$
1964	$x = -1$	$y = 3.67 \times (-1) + 39 = 35.33$
1965	$x = 0$	$y = 3.67 \times 0 + 39 = 39.00$
1966	$x = 1$	$y = 3.67 \times 1 + 39 = 42.67$
1967	$x = 2$	$y = 3.67 \times 2 + 39 = 46.34$
1968	$x = 3$	$y = 3.67 \times 3 + 39 = 50.01$
1969	$x = 4$	$y = 3.67 \times 4 + 39 = 53.68$

கீழேயுள்ள அட்டவணையில் ஒவ்வோர் ஆண்டிற்கும் கொடுத்துள்ள அளவும் போக்கு அளவும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

x	y	போக்களவு
1961	25	24.32
1962	30	27.99
1963	28	31.66
1964	35	35.33
1965	42	39.00
1966	40	42.67
1967	47	46.34
1968	49	50.01
1969	55	53.68

போக்கிற்கான சமன்பாட்டை ஒவ்வொரு முறையும் பயன் படுத்த வேண்டியதில்லை என்பது மேலேயுள்ள அட்டவணை யிலிருந்து தெரியவரும். முதலாண்டிற்கு போக்கு சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால் போதுமானது.

பின்னர், முன் ஆண்டிற்கான போக்களவோடு 'm'ன் மதிப்பைக் கூட்டிச் சென்றால் போதுமானது.

இனி ' y ' யின் இரு அளவுகளை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்போம்.

x	y_0	y_c	$d = y_0 - y_c$	d^2
1961	25	24.32	0 68	04.624
1962	30	27·99	2·01	4 0401
1963	28	31·66	−3·66	13 3956
1964	35	35·33	−0·33	0·1089
1965	42	39·00	3·00	9·0000
1966	40	42·67	−2·67	7·1289
1967	47	46·34	0·66	0 4356
1968	49	50·01	−1·01	1 0201
1969	55	53·68	1·32	1 7424
	351	351.00	0	37·3340

தனிப்பட்ட ஆண்டுகளின் இரண்டு அளவுகளிடையே, கண்ட அளவு (y_0), கணித்த அளவு (y_c) வேறுபாடு இருந்த போதிலும் மொத்த வேறுபாடு ' 0 ' என மாறுவதைக் காணலாம் எனவே சராசரி வேறுபாடும் 0 என மாறும். மேலும், வேறுபாட்டின் வர்க்கங்களின் மொத்தம் அல்லது வேறுபாட்டின் வர்க்கங்களின் சராசரி மிக மிகக் குறைந்தே இருக்குமென்று தெரிகிறது. எனவேதான் இம்முறை குறைந்த வர்க்க முறை எனக் கருதப்படுகிறது.

இவ்வெடுத்துக்காட்டில் மொத்த ஆண்டுகள் அல்லது மொத்த காலங்கள் ஒற்றைப்படை எண் ஆகும். ஆனால் ஆண்டுகளின் எண் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால், நடுவாண்டை எடுப்பதில் சிறிது சிரமம் தோன்றலாம். ஏனெனில் 4 மற்றும் 5 என்ற இரு நடுவாண்டுகள் தோன்றும். இவ்வேளைகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டை நடுவாண்டாக எடுப்பதற்குப் பதிலாக இரு நடுவாண்டுகளின் மையத்தை நடுவாண்டாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். கணிப்பு முறையில் சிறிது மாற்றம் ஏற்படும். இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் பார்ப்போம்.

ஆண்டு x	y	ஆண்டு x	y
1961	25	1966	40
1962	30	1967	47
1963	28	1968	49
1964	35	1969	55
1965	42	1970	59

இங்கு மொத்தம் 10 ஆண்டுகள் இருப்பதால் 1965 மற்றும் 1966 என்ற இரு ஆண்டுகளை நடுவாண்டுகளாக எடுக்க வேண்டியுள்ளது. என்றாலும் இரண்டு ஆண்டுகளை ஆரம்பமாக எடுக்க முடியாது. எனவே இவ்விரு ஆண்டுகளின் மையத்தை நடுவாண்டாக எடுத்து அதை '0' எனக் குறிப்பிடலாம். இதனால் இதர ஆண்டுகளை ஆரம்ப ஆண்டின் விலக்கமாக கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றலாம்.

	x	y	x^2	xy
1961	—4.5	25	20.25	—112.5
1962	—3.5	30	12.25	—105.0
1963	– 2.5	28	6.25	—70 0
1964	—1.5	35	2.25	—52.5
1965	—0.5	42	0.25	—21.0
	0.0			
1966	0.5	40	0.25	20.0
1967	1.5	47	2.25	70.5
1968	2 5	49	6.25	122.5
1969	3.5	55	12.25	192.5
1970	4.5	59	20.25	265.5
		410	82.50	310.0

இதர ஆண்டுகளை ஆரம்ப ஆண்டின் விலக்கங்களாக மாற்றியமைத்த பின்னர், x^2, xy என்ற அளவுகளைக் கணித்து மேலே கண்ட அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

$$n = 10; \quad \Sigma y = 410; \quad \Sigma x^2 = 82.50; \quad \Sigma xy = 310.$$

முன்பு போல் $y = mx + c$ என்றதொரு கோட்டைப் பொருத்தலாம். m மற்றும் c என்பவற்றின் மதிப்பைக் கீழ்க் கண்ட வழிகளைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கலாம்.

$$c = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{410}{10} = 41; m = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{310}{82.5} = 3.76$$

எனவே சமன்பாடு $y = 3.76x + 41$

ஆரம்பம் 1965-66ன் மையம்.

இதில் xன் வர்க்கம் x^2 கண்டு பிடிப்பதிலும் x, xy கண்டு பிடிப்பதிலும் சிரமம் உளது. ஏனெனில் 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5 என்பவற்றின் வர்க்கங்களைக் காண்பதில் முன்னர் கூறிய முறையோடு ஒப்பிட்டுப் பார்த்ததில் சிறிது சிரமம் உளது. இந்த சிரமத்தையும் கீழே உள்ள முறையில் அகற்றலாம்.

	x
1961	—9
1962	—7
1963	—5
1964	—3
1965	—1
	0
1966	1
1967	3
1968	5
1969	7
1970	9

இங்கு ஒரு முழு ஆண்டை 1 என எடுப்பதற்குப் பதிலாக அரையாண்டுக் காலத்தை 1 என எடுத்து இதர ஆண்டுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றலாம். பின்னர் கணிப்பு முறைகள் கீழ் வருமாறு :

	x	y	x^2	xy
1961	—9	25	81	—225
1962	—7	30	49	—210
1963	—5	28	25	—140
1964	—3	35	9	—105
1965	—1	42	1	— 42
	0			
1966	1	40	1	40
1967	3	47	9	141
1968	5	49	25	245
1969	7	55	49	385
1970	9	59	81	531
		410	330	620

$$c = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{410}{10} = 41$$

$$m = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{620}{330} = 1.88$$

சமன்பாடு $y = 1.88x + 41$;

ஆரம்பம் 1965—66

கால அளவு 6 மாதம்.

தற்போது முன்பு 12 மாத காலத்தை 1 கால அளவாகவும் 6 மாத காலத்தை 1 கால அளவாகவும் வைத்துக் கணித்த இரு சமன்பாடுகளையும் ஒப்பிடுவோம். இரண்டு முறைகளில் 1965—66 ஆரம்பமாக எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

1. $y = 3.76x+41$	1965—66 ஆரம்பம்
2. $y = 1.88x+41$	1965—66 ஆரம்பம்

கால அளவு 6 மாதம்.

இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கிடையே உண்மையில் வேறுபாடில்லை. முதல் சமன்பாட்டில் 12 மாதங்களைக் கால அளவாக எடுத்ததால் 'm' ன் மதிப்பு 3.76. இது இரண்டாவதில் 6 மாதங்களைக் கால அளவாக வைத்துக் கணித்துக் கிடைத்த சமன்பாட்டின் 'm' ன் மதிப்பைப் போன்று இரு மடங்காகும். கணிப்பதில் உள்ள எளிமையைக் கருதி இரண்டாவது முறையைப் பின்பற்றலாம்.

குறைந்த வர்க்க முறையில் உள்ள நன்மை

1. எல்லா ஆண்டுகளுக்கும் போக்களவு கணிக்கலாம்.
2. காலத் தொடர் வரிசையில் இல்லாத வேறு எந்த ஆண்டிற்கும் உரிய போக்களவைக் கணிக்கலாம். வருங்காலத்திற்குரிய அளவை முன்கூட்டியே அனுமானிக்கலாம். போக்களவிற்கும் கொடுத்துள்ள அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் மொத்தம் 0. எனவே சராசரி வேறுபாட்டின் அளவும் 0. எனவே இது போக்களவிற்கான நல்லதோர் மதிப்பீட்டைத் தரும்.
3. தனி நபர் விருப்பு வெறுப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. கணித விதி முறைக்குட்பட்டது.

குறைகள்

கணிப்பதில் காலம் தேவைப்படும்.

பருவ மாற்றம் (Seasonal Variation)

காலத் தொடர் வரிசையில் பருவ மாற்றம் குறித்து இனிக் காண்போம். விவரங்கள் வருடாந்திரமாகக் கொடுக்கப்படும் போது அதில் பருவ மாற்றங்கள் காணப்படுவதில்லை. ஏனெனில், பருவ மாற்றங்கள் வாரம், மாதம் அல்லது அரையாண்டு என்ற இடைவெளிகளில் ஏற்படும். பருவ மாற்றத்திற்கான காரணங்கள், சீதோஷ்ணம், கால நிலை, பண்டிகை, பழக்க வழக்கங்களாகும். பருவ மாற்றங்களைக் கீழ்க்கண்ட முறைகளில் அகற்றலாம்.

1. எளிய சராசரி முறை.
2. நகரும் சராசரி முறை.

எளிய சராசரி முறை (Method of Simple Average) :

இது எல்லா முறைகளிலும் எளியது. ஆண்டுகளுக்கு மாதாந்திர விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாக வைத்துக் கொள்வோம். முதலில் விவரங்களை ஓர் ஒழுங்கான முறையில் அமைக்க வேண்டும். முதல் வரிசையில் 12 மாதங்களையும், அடுத்த நிரை வரிசைகளில் வெவ்வேறு ஆண்டுகளையும் கீழே காட்டியுள்ளது போல் அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

மாதம்	1961	1962	1963	1964	மொத்தம்	சராசரி
ஜனவரி						
பிப்ரவரி						
மார்ச்						
ஏப்ரல்						
மே						
ஜூன்						
ஜூலை						
ஆகஸ்டு						
செப்டம்பர்						
அக்டோபர்						
நவம்பர்						
டிசம்பர்						
மொத்தம்						

மாத வாரியான விவரங்களைக் குறித்த பின்னர் ஒவ்வொரு மாதத்திற்கும் உரிய மொத்தத்தையும், சராசரியையும் கடைசி இரு கட்டங்களில் கொடுத்துள்ளதுபோல் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு 12 மதிப்புகள் கிடைக்கும். பிறகு 12 மாதங்களுக்கான மொத்தம் கண்டுபிடித்து 12 கொண்டு வகுத்து மாதத்திற்கான பொது சராசரி காணவேண்டும். பின்னர் ஒவ்வொரு மாதத்தின் சராசரியும் பொது சராசரியால் வகுக்கப்பட்டு 100 கொண்டு பெருக்கப்பட வேண்டும். வேறு விதமாகக் கூறினால் ஒவ்வொரு மாதத்தின் சராசரியும் பொது சராசரியின் சதவீதத்தில் மாற்றப்பட வேண்டும். இவ்வாறு கணித்துக் கிடைத்த சதவீத அளவுகள் பருவமாற்றத்தை விளக்கும் பருவக் குறியீட்டு எண்களாகும்.

$$\text{மாதத்தின் பருவக் குறியீடு} = \frac{\text{மாத சராசரி}}{\text{பொது சராசரி}} \times 100$$

கீழே கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டைக் கவனிப்போம்.

வருடம் / மாதம்	1966	1967	1968	1969	1970	மொத்தம்	சராசரி
ஜனவரி	342	355	182	255	911	2045	409
பிப்ரவரி	298	417	190	285	655	1845	369
மார்ச்	259	343	197	325	471	1595	319
ஏப்ரல்	293	322	193	314	478	1600	320
மே	352	316	170	348	444	1630	326
ஜூன்	426	392	158	434	465	1875	375
ஜூலை	497	305	263	510	460	2035	407
ஆகஸ்டு	547	286	225	486	496	2040	408
செப்டம்பர்	604	295	236	493	522	2150	430
அக்டோபர்	731	301	295	562	576	2465	493
நவம்பர்	642	260	266	675	557	2400	480
டிசம்பர்	568	198	260	804	530	2380	476
						மொத்தம்	4812
						சராசரி	401

மாதம்	மாதச் சராசரி	பருவக் குறியீடு
ஜனவரி	409	102
பிப்ரவரி	369	92
மார்ச்	319	80
ஏப்ரல்	320	80
மே	326	81
ஜூன்	375	93
ஜூலை	407	101
ஆகஸ்டு	408	102
செப்டம்பர்	430	107
அக்டோபர்	493	123
நவம்பர்	480	120
டிசம்பர்	476	119
மொத்தம்	4812	1200
சராசரி	401	100

மாதவாரியாக விவரங்கள் கொடுப்பதற்குப் பதிலாகக் காலாண்டுவாரியாக விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக் காட்டைக் காண்போம்.

ஆண்டு	காலாண்டுகள்			
	முதல்	இரண்டு	மூன்று	நான்கு
1970	42	45	47	48
1971	40	42	45	47
1972	36	37	40	41
1973	40	38	36	39
1974	45	48	42	40
மொத்தம்	205	210	210	215
சராசரி	41	42	42	43

முதலில் ஒவ்வொரு காலாண்டிற்கும் சராசரி காணவேண்டும். பின்னர் பொது சராசரியைக் கீழ்வருமாறு கணிக்க வேண்டும்.

பின்னர் வெவ்வேறு காலாண்டின் சராசரியையும் பொது சராசரியால் வகுத்து 100 கொண்டு பெருக்கி, பொது சராசரியின் சதவீத அளவாக மாற்றப்பட வேண்டும்.

காலாண்டு	சராசரி	பருவக் குறியீடு
முதல் காலாண்டு	41	$\frac{41}{42} \times 100 = 97{\cdot}7$
இரண்டாம் காலாண்டு	42	$\frac{42}{42} \times 100 = 100.0$
மூன்றாம் காலாண்டு	42	$\frac{42}{42} \times 100 = 100.0$
நான்காம் காலாண்டு	43	$\frac{43}{42} \times 100 = 102.4$
மொத்தம்	168	
பொது சராசரி	42	

நமக்கு மாதாந்திர அல்லது நாட்கணக்கான விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்ட போதிலும் இதே முறையே பின்பற்றவேண்டும்

இதே முறையில் மாதாந்திர அல்லது தினசரி பருவக் குறியீட்டெண்களைக் கணிக்கலாம்.

நகரும் சராசரி முறை (Moving Average Method)

எளிய சராசரி முறையில். போக்கு, மற்றும் சுழல் மாற்றங்களால் காலத் தொடர் வரிசையில் ஏற்படும் பாதிப்புக் குறிப்பிடத் தக்கதாக இராது என்று மறைமுகமாகக் கூறியுள்ளோம். எனவே, காலத் தொடர் வரிசையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாதாந்திர விவரங்கள் பருவ மாற்றங்களின் மதிப்பென்று கருதி கணிக்கப்பட்டது. சராசரி கணிப்பதால், காலத் தொடரில் உண்டாகும் எதேச்சை ஏற்ற இறக்கங்களை அகற்றி பருவ மாற்றம் கணித்தோம்.

ஆனால் நகரும் சராசரி முறையில் போக்கு மற்றும் சுழல் மாற்றங்களின் பாதிப்பைச் சிறிதாகக் கருதுவதில்லை. எனவே

நாம் முதலில், போக்கு மற்றும் சுழல் மாற்றங்களை நகரும் சராசரி மூலம் காலத் தொடர் வரிசையிலிருந்து கணிக்கின்றோம். நகரும் சராசரிக்கான காலத்தை ஓர் ஆண்டாக எடுத்துக் கொள்வோம். பின்னர் ஒவ்வொரு மாதத்தின் விவரமும் அம் மாதத்திற்குரிய நகரும் சராசரியால் வகுக்கப்பெற்று 100 கொண்டு பெருக்கப்பட்டு நகரும் சராசரியின் சதவீத அளவில் கொடுக்கப் படும். இவ்வாறு போக்கும் சுழல் மாற்றமும் காலத் தொடர் வரிசையிலிருந்து அகற்றப்படும்.

இவ்வாறு மாதாந்திர விவரங்கள் நகரும் சராசரியின் சதவீதங் களாக மாற்றம் பெற்ற பின், ஒவ்வொரு மாதத்தின் சதவீதங் களின் மொத்தம் தனியாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு சராசரியும் தனியாகக் கணிக்கப்பெறும். பிறகு, எல்லா மாதங்களுக்கான பொது சராசரியும் ஒவ்வொரு மாதத்தின் சராசரியும் கணிக்கப் பெறும். பின் ஒவ்வொரு மாதத்தின் சராசரியும் பொது சராசரியின் சதவீதமாக மாற்றப்படும். இவ்வாறு கிடைக்கும் அளவு பருவமாற்றத்தின் அளவாகக் கருதப்படும்.

நாம் பெருக்கல் முறை அமைப்பை எடுத்துக் கொண்டு நகரும் சராசரி முறை மூலம் பருவமாற்றம் கணிப்பதில் உள்ள பல்வேறு வழிகளைக் கவனிப்போம்.

1. மாதாந்திர விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், 12 மாத நகரும் சராசரி முதலில் கணிக்கப்பெற வேண்டும்.

2. நகரும் சராசரியை நடுவமை நகரும் சராசரியாக்க வேண்டும். இத்தகைய நடுவமை நகரும் சராசரி, போக்கு மற்றும் சுழல் மாற்றங்களைக் குறிக்கும். இது பருவ மாற்றத்திலிருந்தும் விடுபட்டதாகும். ஏனெனில் பருவ மாற்றம் ஓர் ஆண்டு அல்லது அதற்கும் குறை வான காலத்தில் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் தோன்றும். நாம் இங்கு ஓர் ஆண்டு அல்லது 12 மாத நகரும் சராசரியை எடுத்த காரணத்தால் பருவ மாற்றம் அகற்றப்பட்டுவிட்டது எனலாம்.

3. பின்னர் காலத் தொடர் வரிசையில் ஒவ்வொரு மாதத்திற் குரிய விவரமும் அம்மாதத்திற்குரிய நடுவமை நகரும் சராசரியால் வகுக்கப்பட்டு 100 கொண்டு பெருக்கப் பட்டு சதவீத அளவில் கொடுக்கப்படவேண்டும். இச்

சதவீத அளவுகளே ஒவ்வொரு மாதத்திற்குரிய பருவ மாற்ற அளவுகளாகும்.

4. ஒவ்வொரு 12 மாதத்திற்குமுரிய மொத்தமும் சராசரியும் கணிக்கப்பெற இச்சதவீத அளவுகள் மாற்றி எடுக்கப்பட வேண்டும்.

5. பின்னர் ஒவ்வொரு மொத்தத்திற்குமுரிய மொத்தமும் சராசரியும் கணிக்கப்பெற வேண்டும்.

6. பிறகு 12 மாதங்களின் சராசரியிலிருந்து ஒரு மாதத்திற்கான பொது சராசரி காணவேண்டும்.

7. பின்னர் மாத சராசரிகள் பொது சராசரியால் வகுக்கப்பெற்று 100 கொண்டு பெருக்கப்பட்டு பொது சராசரியின் சதவீதமாக மாற்றப்பட வேண்டும். இவ்வாறு கணித்துக் கிடைத்த அளவுகளே மாதங்களுக்கான பருவ மாற்றக் குறியீடுகளாகும்.

$$\text{பருவ மாற்றக் குறியீடு} = \frac{\text{மாதச் சராசரி}}{\text{பொது சராசரி}} \times 100$$

விருதுநகரில் மிளகாயின் மாதாந்திர மொத்த விலைகள் (ரூ. குவிண்டாலுக்கு)

மாதம்	1965—66	1966—67	1967—68	1968—69	1969—70	1970—71
ஏப்ரல்	192.80	293.00	322.00	192.75	314.50	477.50
மே	192.50	352.00	314.95	160.05	347.65	443.45
ஜூன்	176.75	426.25	392.00	159.00	433.50	467.00
ஜூலை	198.00	496.50	304.50	163.13	511.00	462.00
ஆகஸ்டு	198.00	546.75	286.25	225.20	485.60	496.25
செப்டம்பர்	198.00	604.00	295.20	236.25	492.75	520.00
அக்டோபர்	198.00	730.50	301.25	295.00	562.00	574.00
நவம்பர்	383.00	641.50	261.25	266.00	675.00	557.25
டிசம்பர்	352.00	588.00	198.60	260.00	800.75	529.50
ஜனவரி	341.75	355.00	182.50	255.00	912.50	523.00
பிப்ரவரி	298.25	418.75	190.25	285.33	655.00	422.33
மார்ச்	258.75	342.60	197.20	325.25	470.75	380.00

நகரும் சராசரி கணிப்பு

மாதம்	விலை	12 மாதங்களின் மொத்தம்	இரண்டு 12 மாதங்களின் மொத்தம்	12 மாதங்களின் நடுவமை நகரும் சராசரி	நடுவமை நகரும் சராசரியின் சதவீதம்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1965					
ஏப்ரல்	192.80				
மே	192.50				
ஜூன்	176.75				
ஜூலை	198.00				
ஆகஸ்	198.00				
செப்	198.00				
		2987.80			
அக்	198.00		6075.80	253.16	78.21
		3088.00			
நவம்	383.00		6335.50	263.98	145.09
		3247.50			
டிசம்	352.00		6744.50	281.25	125.20
		3497 00			
1966					
ஜன	341.75		7292.50	303.85	112.47
		3795.50			
பிப்	298.25		7939.75	330.82	90.10
		4144.25			
மார்ச்	258.75		8694.50	362.27	71 40
		4550.25			
ஏப்ரல்	293.00		9633.00	401.38	73.00
		5082.75			
மே	352.00		10424.00	434.33	81.04
		5341.25			

நகரும் சராசரி கணிப்பு (தொடர்ச்சி)

மாதம்	விலை	12 மாதங்களின் மொத்தம்	இரண்டு 12 மாதங்களின் மொத்தம்	12 மாதங்களின் நடுமை நகரும் சராசரி	நடுமை நகரும் சராசரியின் சதவீதம்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1966					
ஜூன்	426.25		11 9.8.50	454.94	93.69
		5577.25			
ஜூலை	496.50		11167.75	465.32	106.70
		5590.50			
ஆகஸ்ட்	546.75		11301 50	470.90	116.11
		5711.00			
செப்	604.00		11505.85	479.41	125.99
		5794 85			
அக்	730.50		11618.70	484.11	150.90
		5823.85			
நவம்	641 50		11610.65	481.77	132.60
		5786 80			
டிசம்	588.00		11539.35	480.81	122.29
		5752.55			
1967					
ஜன	355 00		11313.10	471.38	75.31
		5560 55			
பிப்	418.75		10860.60	452.53	92.54
		5300.05			
மார்ச்	342.60		10291.30	428.80	79.90
		4991.25			
ஏப்ரல்	322.00		9553 25	398.05	80.89
		4562.00			
மே	314 95		8743.75	364.32	86.45
		4181 75			
ஜூன்	392 00		7974.10	332 25	117.98
		3792.35			
ஜூலை	304.50		7412.20	308.84	98.59
		3619.85			

நகரும் சராசரி கணிப்பு (தொடர்ச்சி)

மாதம்	விலை	12 மாதங்களின் மொத்தம்	இரண்டு 12 மாதங்களின் மொத்தம்	12 மாதங்களின் நடுவமை நகரும் சராசரி	நடுவமை நகரும் சராசரியின் சதவீதம்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1967					
ஆகஸ்	286.25		7011.20	292.13	97 99
		3391 35			
செப்	295.20		6637.30	276.55	106 74
		3245.95			
அக்	301.25		6362.65	265.11	113.60
		3116.70			
நவம்	261.25		6087 50	253.65	103.00
		2970.80			
டிசம்	198·60		5708 60	237·86	83.49
		2737.80			
1968					
ஜன	182.50		5334.23	222 26	82.11
		2596.43			
பிப்	190.25		5131.81	213 83	88.97
		2535.38			
மார்ச்	197.20		5011.81	208.83	94 43
		2476.43			
ஏப்ரல்	192.75		4946.61	206.11	93.40
		2470.18			
மே	169.05		4945.11	206 05	82.04
		2474.93			
ஜூன்	159.00		5011.26	208.80	76.15
		2536 33			
ஜூலை	163 13		5145.16	214 38	76 09
		2608 83			
ஆகஸ்	225.20		5312.74	221 36	101 73
		2703.91			
செப்	236.25		5535.87	230.66	102.42
		2831.96			

நகரும் சராசரி கணிப்பு (தொடர்ச்சி)

மாதம்	விலை	12 மாதங்களின் மொத்தம்	இரண்டு 12 மாதங்களின் மொத்தம்	12 மாதங்களின் நடுவமை நகரும் சராசரி	நடுவமை நகரும் சராசரியின் சதவீதம்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1968					
அக்	295.00		5787.67	241.07	122.37
		2953.71			
நவம்	266.00		6086.02	253.58	104.90
		3132.31			
டிசம்	260 00		6539.12	272.46	95.43
		3406 81			
1969					
ஜன	255.00		7161 49	298.40	85.46
		3754.68			
பிப்	285.33		7769.76	324.00	88.14
		4015.08			
மார்ச்	325.25		8286.66	345 28	94 20
		4271.58			
ஏப்ரல்	314.50		8810.16	367.09	85.67
		4538.58			
மே	347.65		9486.16	395.26	87.95
		4947.58			
ஜூன்	433.50		10435.91	434.83	99.69
		5488.33			
ஜூலை	511.00		11634.16	484.76	105.41
		6145 83			
ஆகஸ்	485.60		12661.33	527.56	92.05
		6515.50			
செப்	492.75		13176.50	549.02	89.75
		6661.00			
அக்	562.00		13485 00	561 88	100.02
		6824.00			
நவம்	675.00		13743.80	572 66	117.87
		6919.80			
டிசம்பர்	800.71		13871.10	577.46	138 55
		6951.30			

நகரும் சராசரி கணிப்பு (தொடர்ச்சி)

மாதம்	விலை	12 மாதங்களின் மொத்தம்	இரண்டு 12 மாதங்களின் மொத்தம்	12 மாதங்களின் நடுவமை நகரும் சராசரி	நடுவமை நகரும் சராசரியின் சதவீதம்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1970					
ஜனவரி	912.50		13853.60	577.23	158.0[illegible]
		6902.30			
பிப்ரவரி	655.00		13812.25	575.64	113.79
		6912.95			
மார்ச்	470.75		13853.15	577.21	81 56
		6940.20			
ஏப்ரல்	477.50		13892.40	578.85	82.49
		6952.2[illegible]			
மே	443 45		13786.65	574 44	72.20
		6834 45			
ஜூன்	465.00		13397 65	558.24	83.30
		6563.20			
ஜூலை	462.00		12737.40	530 73	87.05
		6174.20			
ஆகஸ்ட்	496.25		12115.73	504.82	98.30
		5941.53			
செப்	520.00		11792 31	491.74	105·83
		5850.78			
அக்	574.00				
நவ	557.25				
டிசம்பர்	529.50				
1971					
ஜனவரி	523.50				
பிப்ரவரி	422.33				
மார்ச்	380.00				

பருவக் குறியீட்டு எண் கணிப்பு

	அக்டோபர்	நவம்பர்	டிசம்பர்	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்	ஏப்ரல்	மே	ஜுன்	ஜுலை	ஆகஸ்டு	செப்டம்பர்
1. (65-66)	78.2	145.1	125 2	112.5	90.1	71.4	73.0	81.0	93.7	106.7	116.1	126.0
2. (66-67)	150.9	132.6	122.3	75.3	92.5	79.9	80.9	86.5	118 0	98.6	98.0	106.7
3. (67-68)	113.6	103.0	83.5	82.1	89.0	94.4	93.5	82.0	76.2	76.1	101.7	102 4
4. (68-69)	122.4	104.9	95 4	85.5	88.1	94.2	85.7	88.0	99.7	105.4	92 1	89.8
5. (69-70)	100.0	117.9	138.6	158.1	113.8	81.6	82 5	77.2	83 3	87.1	98.3	105 8
மொத்தம்	565.1	603.5	565.0	513.5	473.5	421.5	415.6	414.7	470.9	473.9	506 2	530 7
சராசரி	113.0	120.7	113 5	102.7	94.7	84.3	83.1	82.9	94.2	94 8	101 2	106.1

மாதம்	சராசரி	பருவக்குறியீட்டு எண்
அக்டோபர்	113·0	$\frac{113\cdot0\times100}{99\cdot2}=113\cdot9$
நவம்பர்	120.7	$\frac{120\cdot7\times100}{99\cdot2}=121\cdot6$
டிசம்பர்	113·0	$\frac{113\cdot0\times100}{99\cdot2}=113.9$
ஜனவரி	102·7	$\frac{102\cdot7\times100}{99\cdot2}=103\cdot5$
பிப்ரவரி	94·7	$\frac{94\cdot7\times100}{99\cdot2}=95.4$
மார்ச்	84·3	$\frac{84.3\times100}{99\cdot2}=85\cdot0$
ஏப்ரல்	83·1	$\frac{83.1\times100}{99\ 2}=83\cdot8$
மே	82 9	$\frac{82\cdot9\times100}{99\cdot2}=83\cdot6$
ஜூன்	94·2	$\frac{94.2\times100}{99\ 2}=94\cdot9$
ஜூலை	94·8	$\frac{94.8\times100}{99.2}=95\cdot5$
ஆகஸ்ட்	101·2	$\frac{101\cdot2\times100}{99\cdot2}=102\cdot0$
செப்டம்பர்	106·1	$\frac{106\cdot1\times100}{99\ 2}=106.9$
மொத்தம்	1190·7	1200·0
பொதுச் சராசரி	99·2	100·0

கூட்டு முறை

பெருக்கல் முறையைக் கவனித்தோம். இது கூட்டு முறையாகயிருந்தால், கீழேயுள்ள முறைகளைப் பின்பற்றலாம்.

1. நகரும் சராசரி கணித்த பின்னர் நகரும் சராசரியை மாதாந்திர அளவுகளிலிருந்து கழித்து வேறுபாடு கணிக்க வேண்டும்.

2. இத்தகைய மாதாந்திர வேறுபாட்டளவை, 12 மாதங்களின் மொத்தம் மற்றும் சராசரி, வேறுபாடு என்பவற்றை எளிதில் கண்டுபிடிப்பதற்காக மாற்றியமைக்க வேண்டும் இவ்வாறு கணித்துக் கிடைத்த சராசரி வேறுபாடு பருவமாற்று அளவாகும்.

சுழல் மாற்றம்

(Cyclic Movement)

பருவ மாற்றம் போன்று சுழல் மாற்றமும் ஒழுங்காக வருவதாகும். பருவ மாற்றத்தின் காலம் ஓர் ஆண்டு அல்லது ஓர் ஆண்டை விடவும் குறைவாக இருந்த போதிலும் சுழல் மாற்றம் ஓர் ஆண்டிற்கு அதிகமாகவும் பெரும்பான்மையும் 5 முதல் 10 ஆண்டுகள் வரையிலும் இருக்கும். பருவ மாற்றம் குறிப்பிட்ட காலக் கெடுவில் ஒழுங்காக வரும். ஆனால் சுழல் மாற்றம் ஒழுங்காக நியதியில் தோன்றுவதில்லை.

சார்பில்லா போக்கு நீண்ட காலத் தொடரில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் குறிக்கும். ஆனால் சுழல் மாற்றம் 5 அல்லது 10 ஆண்டுகளுக்கிடையில் தோன்றும் மாற்றத்தைக் குறிக்கும்.

சார்பில்லா போக்கு ஒரே திசையில் ஏறுமுகமாகவோ அல்லது இறங்கு முகமாகவோ செல்லும். ஆனால் சுழல் மாற்றத்தில் ஏற்ற இறக்கம் என்ற இருவித மாற்றங்களும் நிகழும்.

சுழல் மாற்றம் பொதுவாக வியாபார வட்டாரங்களில் நிகழ்வதால் இது வியாபாரச் சுழல் (Business Cycle) என்றும் அழைக்கப்படும். வியாபாரத்தில் ஏற்றமும் இறக்கமும் உண்டு என்பது தெரிந்ததே. வியாபாரச் சுழலில் குறிப்பிட்டுக் கூறக் கூடிய காலங்களும் உண்டு. அவையாவன :

1. மந்தம் (Depression)
2. மீட்சி (Recovery)
3. செழிப்பு (Prosperity)
4. ஓய்வு (Recession)

ஒரு மந்தத்திலிருந்து இன்னொரு மந்தம் வரையிலும் அல்லது ஒரு மீட்சியிலிருந்து இன்னொரு மீட்சி வரையிலும் அல்லது ஒரு செழிப்பிலிருந்து இன்னொரு செழிப்பு வரையிலும் அல்லது ஒரு ஓய்விலிருந்து இன்னொரு ஓய்வு வரையிலும் உள்ள இடைவெளி காலம் சுழல் எனப்படும்.

சுழல் மாற்றம் கணிப்பு

போக்கு மற்றும் பருவ மாற்றங்களை நாம் கணித்தது போல் சுழல் மாற்றத்தைக் கணிக்கவேண்டும்.

பெருக்கல் அமைப்பு

1. நகரும் சராசரி முறையிலோ அல்லது குறைந்த வர்க்க முறையிலோ முதலில் போக்களவு கணிக்கப்பட வேண்டும். இது 'T' என்ற எழுத்தால் குறி பிடப்படும்.

2 பின்னர் பருவக் குறியீடுகள், எளிய சராசரி முறை மூலமாகவோ அல்லது நகரும் சராசரி மூலமாகவோ கணிக்கப்பெறும். இது 'S' என்று குறிப்பிடப்படும். மாதாந்திர விவரங்கள் கொண்ட காலத்தொடர், போக்கு (T), பருவமாற்றம் (S) சுழல் (C, மற்றும் ஒழுங்கில்லா மாற்றம் (I) என்ற நால்வகை மாற்றங்களின் பெருக்குப் பலன் T × S × C × I என்பதை நினைவு கூற வேண்டும்.

   ஆண்டு வாரி விலைகள் அடங்கிய காலத் தொடர் வரிசையில் பருவ மாற்றம் இருக்காது ஏனெனில் மாதாந்திர விவரங்களில் தான் பருவ மாற்றம் இருக்கும். இது போன்று ஆண்டு வாரி விவரம் கொண்ட காலத் தொடர் வரிசையில் ஒழுங்கற்ற மாற்றமிராது.

3. மூல அளவுகளை T × S என்ற அளவுகளின் பெருக்குப் பலனால் வகுத்தால் கிடைப்பது C×I என்ற மாற்றங்களின் பெருக்குப் பலனாகும். எனவே போக்கு

மற்றும் பருவ மாற்றங்களின் பெருக்குப்பலன்.

$$Y = T \times S \times C \times I; \qquad \frac{Y}{T \times S} = C \times I$$

4. C மற்றும் I என்பவைகளின் பெருக்குப் பலனிலிருந்து C×I நகரும் சராசரி கணிக்கலாம். இது கொடுத்துள்ள காலத் தொடர் வரிசையில் உள்ள சுழல் பகுதியைத் தெரிவிக்கும். ஏனெனில் நகரும் சராசரி கணிக்கும் போது, C×I என்பவற்றிலிருந்து ஒழுங்கற்ற மாற்றத்தை அகற்றுகின்றோம். என்றாலும், குறுகிய கால நகரும் சராசரியால் இதை ஒருவாறு ஒழுங்கு பண்ணலாம். ஒழுங்கற்ற மாற்றம், மாதம் போன்ற குறுகிய கால முடையது. ஒரு சில வேளைகளில் நீண்ட கால முடையதுமாகும். எனவே சுழலையும் ஒழுங்கற்ற மாற்றத்தையும் பிரதிபலிக்கும் சதவீத அளவுகளின் இரண்டு அல்லது மூன்று மாத நகரும் சராசரிகளால் ஒழுங்கற்ற மாற்றத்தை அகற்றி சுழல் மாற்றத்தைக் கணிக்கலாம்.

ஒழுங்கற்ற மாற்றம் (Irregular Movement)

இதர மாற்றங்களால் விளக்க முடியாத எஞ்சிய மாற்றமே ஒழுங்கற்ற மாற்றமாகும். இவை ஒழுங்கற்ற அல்லது எதிர் பாராத மறியல், கதவடைப்பு, வெள்ளப் பெருக்கு, போர் என்ற காரணங்களால் உண்டாகலாம். இவைகள் தோன்று வதற்கான குறிப்பிட்ட கால அளவு இல்லை. இத்தகைய ஒழுங்கற்ற முறையினால் இவற்றை தனியாகப் பிரிப்பதும் சிரமமானது. மூல விவரங்களிலிருந்து ஒழுங்கற்ற மாற்றத்தை யும் பிரிப்பதற்குரிய சரியான மார்க்கமில்லை. காலத் தொடர் வரிசையில் கொடுத்துள்ள விவரங்களின் போக்கு, பருவ மாற்றம், சுழல் மாற்றம் என்பவைகளை அகற்றி பின்னர் எஞ்சியுள்ளவற்றை ஒழுங்கற்ற மாற்றமாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி

1. காலத் தொடர் வரிசை என்றால் என்ன? அதன் பகுதி களைக் குறிப்பிட்டு அவற்றின் கூட்டு அமைப்பு முறை களையும் விவரிக்க.

2 காலத் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு பற்றி விளக்குக. வணிகத்தில் அதன் முக்கியத்துவம் பற்றி குறிப்பிடுக.

3. சிறு குறிப்பு வரைக.

   (1) போக்கு

   (2) பருவ மாற்றம்

   (3) சுழல் மாற்றம்

   (4) நகரும் சராசரிகள்

   (5) குறைந்த வர்க்க முறை

4 போக்கு கணிக்கப்படும் முறையை விவரிக்கவும்.

5. காலத் தொடர் வரிசையிலிருந்து பருவ மாற்றத்தை விலக்குவதற்கான பொது முறை என்ன ?

6. கீழே கொடுத்துள்ள காலத் தொடர் வரிசையிலிருந்து மூன்றாண்டு நகரும் சராசரி கணிக்கவும். கணித்த அளவுகளை ஒரு வரைபடத்தில் குறித்துக் காட்டுக.

ஆண்டு	உற்பத்தி (டன்கள்)
1946	150
1947	140
1948	150
1949	210
1950	260
1951	310
1952	320
1953	350

7. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்திக் காட்டுக.

ஆண்டு	அளவு
1960	70
1961	75
1962	80
1963	85
1964	90
1965	95
1966	100

8. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களிலிருந்து பருவக் குறியீட்டெண் கண்டுபிடிக்க.

பருவம்	1960	1961	1962	1963	1964
முதற் காலாண்டு	40	42	41	45	42
இரண்டாம் காலாண்டு	35	37	35	36	38
மூன்றாம் காலாண்டு	38	36	38	36	37
நான்காம் காலாண்டு	40	39	42	41	43

அத்தியாயம் 8

பல்வேறு மாதிரி ஆய்வுகள்

(Different types of Sample Surveys)

குறிப்பிட்ட செலவில் மிகக் குறைந்த அளவு குறையுடன் மிகக் குறைந்த செலவில் ஒரு பொருள் குறித்து மதிப்பீட்டைப் பெறுவதே மாதிரிகள் எடுப்பதன் நோக்கமாகும். மாதிரிகள் எடுக்கும் முறைகள் பல்வேறு உருவாகியுள்ளன. இம்முறைகள் மாதிரிகளின் மூல விலக்கத்தையோ அல்லது மூலக் குறை அல்லது செலவையோ அல்லது இரண்டையுமோ குறைப்பதற்குப் பயன்படும். சில முக்கியமான மாதிரி ஆய்வு குறித்துப் படிப்போம் ஈண்டு மதிப்பீடு முறைகளைத் தவிர்த்து மாதிரி உறுப்புகளை எடுப்பதைக் குறித்துப் படிப்பதோடு தற்சமயம் நிறுத்திக் கொள்வோம்.

எல்லா மாதிரி முறைகளிலும் தனி நபர்களின் ஓரத் தன்மையை (Bias) தவிர்ப்பதற்காக, மாதிரிகள் யாவும் எதேச்சை எண்களின் மூலமாகவே தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. எனவே எல்லா ஆய்வுகளிலும் எதேச்சை மாதிரிகளே தேர்ந்தெடுக்கப் படுகின்றன என்பதை நினைவுறுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

எதேச்சை எண்களின் பயனும் எதேச்சை மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தலும்

எதேச்சை மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் எதேச்சை எண்கள் பயன் குறித்து முன்பே படித்துள்ளோம். தற்போது பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் சிறந்த முறையே எதேச்சை எண்களைப் பயன்படுத்துவதுதான். தற்போது, டிப்பட் எதேச்சை எண்கள். பிஷர் மற்றும் யேட் என்பார்களின் எதேச்சை எண்கள் என அட்டவணையாக வெளியிடப் பட்டுள்ள எண்கள் உள.

எதேச்சை எண்களைப் பயன்படுத்தி மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் உள்ள செயல் முறை என்னவெனில் தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு நபருக்கும் 1 முதல் N வரை வரிசை கொடுக்க வேண்டும். பின்னர் N என்ற எண்ணையோ

அதை விடக் குறைந்த எதேச்சை எண்ணையோ தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். நமக்குத் தேவையான அளவு எதேச்சை எண்களைத் தேர்ந்தெடுத்த பின்னர், எதேச்சை எண்களுக்கு ஏற்ற வரிசை எண்ணுடைய தொகுதியில் உள்ள உறுப்பினர்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

மீண்டும் வரும் எதேச்சை மாதிரி (Random Sample with Replacement)

இம்முறையில் 'N' நபர்களைக்கொண்ட தொகுதியிலிருந்து 'n' நபர்கள் கொண்ட ஒரு பகுதியை எடுக்கின்றோம். ஒரு நபரைத் தொகுதியிலிருந்து தெரிந்தெடுத்த பின்னர் அதே நபரை மீண்டும் தொகுதியில் சேர்த்துப் பின்னர் இரண்டாவது நபரைத் தெரிந்தெடுப்போம். இம்முறை மீண்டும் வரா முறையில் விளக்கியது போன்றதே. வேறுபாடு எல்லாம் ஒரே நபர் எத்தனைத் தடவைகள் வந்தாலும் அத்தனைத் தடவைகளிலும் அந் நபரை ஏற்றுக் கொள்ளுகிறோம். எனவே 'n' நபர்கள் கொண்ட மீண்டும் வரும் மாதிரியில் 'n' அல்லது அதைவிடவும் குறைவான வெவ்வேறு நபர்கள் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

5 பிர்க்காக்களில் மொத்தம் 98 கிராமங்கள் கொண்ட ஒரு தாலுக்காவிலிருந்து சமூகப் பொருளாதார ஆய்விற்காக 5 கிராமங்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது.

செயல் முறை

முதலில் 98 கிராமங்களுக்கும் 1 முதல் 98 வரை வரிசை எண்கள் கொடுப்போம். 98 என்பது இரண்டு இலக்க எண்ணாதலால் நாம் இரண்டு இலக்க எதேச்சை எண்களை மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்காகக் கவனிப்போம். இரண்டு இலக்க எண்ணில் 2ஆவது வரிசையைக் கவனிப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட எதேச்சை எண்கள் 51, 97, 79, 69 மற்றும் 60. முதலில் உள்ள 5 எதேச்சை எண்களும் 98ஐ விடச் சிறியனவாக இருப்பதால் அவைகளையே எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே, ஆய்விற்காக எடுக்க வேண்டிய கிராமங்கள் 51, 97, 79 69 மற்றும் 60 என்ற வரிசை எண்கள் கொடுக்கப்பட்ட கிராமங்களாகவே யிருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் எல்லா பிர்க்காக்களிலு முள்ள எல்லா கிராமங்களுக்கும் வரிசை எண்கள் கொடுக்க வேண்டும் என்று கூறப்பட்டது. சில வேளைகளில் இவ்வாறு செய்வது தேவையில்லாதிருக்கலாம். ஒவ்வொரு பிர்க்காவிலும் உள்ள கிராமங்களின் எண்ணிக்கை கீழ்க்கண்டவாறு இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

பிர்க்காவின் வரிசை எண்	பிர்க்காவில் உள்ள கிராமங்களின் எண்ணிக்கை	கிராமங்களின் கூட்டு எண்ணிக்கை	முதல் வரிசை எண்	கடைசி வரிசை எண்
1	20	20	1	20
2	15	35	21	35
3	18	53	36	53
4	25	78	54	78
5	20	98	79	98

முன்னர் எடுத்த எதேச்சை எண்களின்படி கீழே கொடுத்துள்ள வரிசை எண்களைக் கொண்ட கிராமங்களை எடுக்க வேண்டும்.

51, 97, 79, 69 மற்றும் 60.

இந்தக் கிராமங்கள் கீழே கொடுத்துள்ள பிர்க்காக்களில் உள்ளன.

கிராமங்கள்	பிர்க்கா
51	3
60, 69	4
79, 97	5

நமக்குத் தேவையான கிராமங்கள் 3, 4, 5 என்ற மூன்று பிர்க்காக்களிலிருப்பதால், இம்மூன்று பிர்க்காக்களிலுள்ள

கிராமங்களுக்கு மாத்திரம் வரிசை எண்கள் கொடுத்தால் போதுமானது இதனால் வேலையும் காலமும் குறைகிறது.

பகுத்தாய்வு முறை (Stratified Sampling)

சில வேளைகளில் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் ஒன்று போல் சீராக இல்லாமல் பலதரப்பட்டவையாக இருக்கலாம். இச்சூழ்நிலைகளில் தொகுதியைச் சம எண்ணிக்கை நபர்கள் கொண்ட அல்லது சம எண்ணிக்கை நபர்கள் இல்லாத பல பிரிவுகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். ஆனால் அந்தந்தப் பிரிவில் உள்ள நபர்கள் ஏகதேசம் ஒருமைப்பாடு உடையவர்களாயிருக்குமாறு பார்த்துக் கொள்ள வேண்டும். ஒவ்வொரு பிரிவும் 'வகுப்பு' (Stratum) எனப்படும். எனவேதான் இது வகுப்பாய்வு அல்லது பகுப்பாய்வு எனப்படும். இவ்வாறு பகுத்த பின்னர் ஒவ்வொரு வகுப்பும் தனித்தனி தொகுதிகளாகக் கருதப் பட்டு ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும். ஒவ்வொரு வகுப்பிலிருந்தும் தெரிந்தெடுக்கப்படவேண்டிய நபர்களின் எண்ணிக்கை அந்தந்த வகுப்பிலுள்ள மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்திருக்கும். எனவே ஒரு வகுப்பிலிருந்து ஒரு நபரைத் தெரிந்தெடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பு அல்லது நிகழ்திறன் இன்னொரு வகுப்பிலிருந்து ஒரு நபரைத் தெரிந்தெடுப்பதற்குரிய நிகழ்திறனிலிருந்து வேறுபடும் என்றாலும் எல்லா வகுப்புகளையும் ஒன்று சேரக் கவனிக்கும் போது ஒரு வகுப்பிலிருந்து ஒரு நபரைத் தெரிந்தெடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பு இதர வகுப்புகளிலிருந்து இன்னொரு நபரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பிற்குச் சமமாகயிருக்கும். ஏனெனில், ஒரு வகுப்பிலுள்ள ஒரு நபரின் வாய்ப்பு முதலில் தொகுதியிலிருந்து அவ்வகுப்பைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பைப் பொறுத்துள்ளது. எனவே இவ்விரு வாய்ப்புகளையும் ஒரு சேர ஒரே நேரத்தில் கவனித்தால் ஒரு நபருக்குரிய வாய்ப்பு எல்லா வகுப்புகளிலும் ஒன்று போலிருக்கும்.

நாம் எந்த குணம் பற்றி ஆய்வு செய்யக் கருதியுள்ளோமோ அந்தக் குணத்தோடு தொடர்புடைய பிறிதொரு குணத்தின் அடிப்படையில், தொகுதியைப் பகுக்கலாம். ஒரு மாவட்டத்தில் உள்ள ஒரு பயிரின் பரப்பளவு குறித்து ஆய்வு நடத்த வேண்டியிருந்தால், அம் மாவட்டத்தை அந்தப் பயிரின் பரப்பளவின் அடிப்படையில் பகுக்காமல், அந்த மாவட்டத்தின் மொத்தப் பரப்பளவின் அடிப்படையில் பகுக்கலாம். ஏனெனில் ஒரு பயிரின் பரப்பளவு மொத்தப் பரப்பளவைப் பொறுத்திருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு தொழிற்சாலையில் 600 தொழிலாளர்கள் உள்ளனர். இவர்கள் ஒவ்வொருவரின் வாரச் சம்பளம் 6 ரூபாயிலிருந்து 100 ரூபாய் வரையில் உள்ளது. இத்தொழிற்சாலையில் உள்ள தொழிலாளர்களின் மொத்த வருமானத்தை எவ்வாறு கணக்கிடுவது?

செய்முறை

தொழிலாளர்களை அவர்களது வருமானத்தின் அடிப்படையில் 5 பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். இது கீழ்க்கண்டவாறு இருப்பதாகக் கருதுவோம்.

சம்பள வீச்சு	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	எடுக்கவேண்டிய மாதிரி அளவு தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
10 ரூபாய்க்கும் குறைந்த சம்பளம்	180	9
ரூ. 10 — ரூ 25	120	6
ரூ. 26 — ரூ. 50	120	6
ரூ. 51 — ரூ. 80	100	5
ரூ. 81-க்கு அதிகம்	80	4
மொத்தம்	600	30

நமது ஆய்விற்கு 5 சதவீத மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமென்றிருந்தால், முதல் பிரிவிலிருந்து 9 நபர்களையும், இரண்டாவது பிரிவிலிருந்து 6 நபர்களையும், மூன்றாவது பிரிவிலிருந்து 6 நபர்களையும், நான்காவது பிரிவிலிருந்து 5 நபர்களையும், கடைசிப் பிரிவிலிருந்து 4 நபர்களையும் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும்.

வகுப்பு	எதேச்சை எண்களின் வரிசை எண்	தெரிந்தெடுத்த எதேச்சை எண்கள்	தொழிலாளர்களின் வரிசை எண்
முதல் வகுப்பு			
மொத்த			*
நபர்கள் 180	2	807	807÷180= 87
180×5=900		186	186÷180= 6
கவனிக்க வேண்டிய		410	410÷180= 50
எதேச்சை எண்கள்			
1—900		345	345÷180=165
		626	626÷180= 86
எடுக்க வேண்டிய		340	340÷180=160
மாதிரிகளின்			
எண்ணிக்கை 9		883	883÷180=163
		569	569÷180= 29
	2	341	341÷180=161
இரண்டாவது வகுப்பு			
மொத்த			
நபர்கள் 120	2	094	= 94
120×8=960		322	322÷120= 82
கவனிக்க வேண்டிய		252	252÷120= 12
எதேச்சை எண்கள்			
1—960		047	= 47
எடுக்க வேண்டிய		469	469÷120=109
மாதிரிகளின்			
எண்ணிக்கை 6	2	632	632÷120= 32
மூன்றாம் வகுப்பு			
மொத்த			
நபர்கள் 120	3	270	270÷120= 30
120×8=960		608	608÷120= 8

வகுப்பு	எதேச்சை எண்களின் வரிசை எண்	தெரிந்தெடுத்த எதேச்சை எண்கள்	தொழிலாளர் களின் வரிசை எண்
கவனிக்க வேண்டிய எதேச்சை எண்கள்		099	* = 99
1—960		226	226÷120 = 106
எடுக்க வேண்டிய மாதிரிகளின்		225	225÷120 = 105
எண்ணிக்கை 6		928	928÷120 = 88
நான்காவது வகுப்பு மொத்த			
நபர்கள் 100	3	273	273÷100 = 73
100×9 = 900		858	858÷100 = 58
கவனிக்க வேண்டிய எதேச்சை எண்கள்		221	221÷100 = 21
1—900		479	479÷100 = 79
எடுக்க வேண்டிய மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை 5		243	243÷100 = 43
ஐந்தாவது வகுப்பு			
மொத்த நபர்கள்	3	212	212÷ 80 = 52
80×12 = 960		384	384÷ 80 = 64
கவனிக்க வேண்டிய எதேச்சை எண்கள்		233	233÷ 80 = 73
1—960		569	569÷ 80 = 9
எடுக்க வேண்டிய மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை 4			

குறிப்பு : * கடைசிக் கட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்ட எண், எதேச்சை எண்களை அவ்வகுப்பில் உள்ள மொத்த நபர்களின் எண்ணிகையால் வகுத்துக் கிடைத்த மீதி என்பதைக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

ஒழுங்கு முறை ஆய்வு (Systematic Sampling)

இம் முறையில் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்ட எல்லா நபர்களும் எதேச்சை முறையில் எடுக்கப்பட்டவர்களாயிருக்க மாட்டார்கள். மாதிரியில் உள்ள முதல் நபர் ஒருவர் மாத்திரம்தான் எதேச்சை எண் மூலம் தெரிந்தெடுத்தவராக இருப்பார். இதர உறுப்பினர்கள் அவ்வாறிருக்கமாட்டார்கள். முதல் நபரை எதேச்சை எண் மூலம் தெரிந்தெடுத்த பின்னர் அடுத்துள்ள நபர்களை ஒவ்வொருவருக்குமிடையில் குறிப்பிட்ட இடைவெளி தூரமிருக்குமாறு தேர்ந்தெடுப்பர். இத்தகைய இடைவெளி தூரம் தொகுதியில் எத்தனை பேர்கள் உள்ளனர் என்பதைப் பொறுத்தும், மாதிரியில் எத்தனை நபர்களிலிருக்க வேண்டுமென்பதைப் பொறுத்துமிருக்கும். சுருக்கமாகச் சொன்னால் இது மாதிரியின் விகிதத்தைப் பொறுத்திருக்கும்.

முன்னர் விவரித்ததுபோல் தொகுதியில் உள்ள எல்லா நபர்களுக்கும் வரிசை எண்கள் கொடுக்க வேண்டும். தொகுதியில் மொத்தம் 150 வயல்கள் இருப்பதாகவும் அதில் 5 சதவீத வயல்களை மாதிரிகளாகத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது எனவும் கருதுவோம்.

$$\text{மொத்த வயல்கள்} = 150$$

$$5 \text{ சதவீதம் மாதிரி} = \frac{150 \times 5}{100} = 7\tfrac{1}{2}$$

ஏகதேசம் 8

இது 5 சதவீத மாதிரியாக இருப்பதால் 20 வயல்களில் ஒன்றைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும். எனவே இரு வயல்களுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி 20 வயல்கள்.

5 சதவீத வயல்களைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டுமென்றால் மொத்தம் 8 வயல்களைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும். எனவே முதலில் 8 அல்லது 8ஐவிடக் குறைவான ஓர் எதேச்சை எண்ணை எடுப்போம். 8 என்பது ஓர் இலக்க எண்ணாக இருப்பதால் ஓர் இலக்கம் கொண்ட எதேச்சை எண் வரிசைகளைப் பார்க்க வேண்டும். ஓர் இலக்க எண்களில் 4வது வரிசையைக் கருதுவதாக வைத்துக்கொள்வோம். இவ் வரிசையில் முதல் எண் 6. இவ்வெண் 8ஐவிடக் குறைவாகயிருப்பதால் 6ஐத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். எனவே 6வது வயலை எடுத்துக்கொண்ட பின்னர், எஞ்சிய வயல்களையும் கீழ்க் கண்டவாறு எடுக்கலாம்.

(1)	6	=	6	(5)	66+20	=	86
(2)	6+20	=	26	(6)	86+20	=	106
(3)	26+20	=	46	(7)	106+20	=	126
(4)	46+20	=	66	(8)	126+20	=	146

தேர்ந்தெடுக்க வேண்டிய வயல்களின் வரிசை எண்கள் 6, 26, 46, 66, 86, 106, 126, 146.

கூட்டு மாதிரி அல்லது மாதிரிகளின் கூட்டு அல்லது மாதிரிக் கூறு (Cluster Sampling)

இவ் ஆய்வு முறையில், தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டிய மாதிரிகள் வெவ்வேறு கூறுகளாயிருக்கும். ஒவ்வொரு கூறிலும் ஒன்றோ அல்லது ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட சம எண்ணிக்கை உறுப்பினரோ இருக்கவேண்டும். ஒவ்வொரு கூறிலும் ஒரே ஒருவர் எதேச்சை முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவராக இருப்பார். இதர உறுப்பினர்கள் எதேச்சை எண்கள் மூலம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவராக யிருக்க மாட்டார்கள்.

முதலில் தேவைக்கேற்ற எண்ணிக்கை கொண்ட மாதிரி நபர்கள் எதேச்சை எண்கள் மூலம் தெரிந்தெடுக்கப்படுவர். ஒரு நபரை எதேச்சை எண் மூலம் தேர்ந்தெடுத்த பின்னர் அவரை அடுத்துச் சுற்றிலும் உள்ள சில நபர்களையும் சேர்த்துக் கொள்வர். இவ்வாறு சேர்த்துக்கொள்ளப்பட்ட அனைவரும் சேர்ந்த பகுதியே ஒரு கூறாகும். பொதுவாகத் தொகுதி மிகப் பெரியதாகவும், பண்பில் பரந்தும் காணப்பட்டால் இம் முறை பெரிதும் பின்பற்றப்படும். தென்னை, கமுகு மரங்களின் மகசூலை மதிப்பிடும் ஆய்வு முறைகளில் இத்தகைய மாதிரிக் கூறு முறைகளே பின்பற்றப்படும். ஒவ்வொரு கூறும் 5 மரங்கள் கொண்ட மூன்று கூறுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும் எனக் கருதுவோம். தேர்ந்தெடுத்த மூன்று எதேச்சை எண்கள் 11, 27, 43 என்று வைத்துக்கொள்வோம். பின்னர் கூறுகளில் உள்ள இதர மரங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கும்.

முதல் கூறு	9,	10,	11,	12,	13
இரண்டாவது கூறு	25,	26,	27,	28,	29
மூன்றாவது கூறு	41,	42,	43,	44,	45

வரிசை மாதிரி அல்லது வரிசை முறை ஆய்வு (Line Sampling)

சில வேளைகளில் தொகுதி, தோட்டங்களில் மரங்கள் வரிசையாக இருப்பது போன்றோ, அல்லது குடியிருப்புகளில் வீடுகள் வரிசையாக இருப்பது போன்றோ இணையான பல வரிசை உறுப்புகள் கொண்டதாக இருக்கலாம். இந் நிலையில் எதேச்சை எண் மூலம் ஒரு குறிப்பிட்ட வரிசை தேர்ந்தெடுக்கப்படலாம். பின்னர் தேவையான அளவு மரங்களோ அல்லது வீடுகளோ அந்த வரிசையிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படலாம். இந் நிலையில் தொகுதியின் உறுப்பினர் பட்டியல் தயார் செய்வதற்காகத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா மரங்களையும் அல்லது எல்லா வீடுகளையும் வரிசை எண் கொடுத்துப் பட்டியல் தயார் செய்ய வேண்டியதில்லை. மாறாக, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட வரிசையில் உள்ள மரங்களை அல்லது வீடுகளை மாத்திரம் வரிசை எண் கொடுத்து அமைத்தால் போதுமானது.

பல் நிலை மாதிரி ஆய்வு (Multi Stage Sampling)

பல் நிலை மாதிரி ஆய்வில் முதல் நிலையில் தொகுதி பல உறுப்புகளால் அமைந்ததாகயிருக்கும். இரண்டாவது நிலையில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் மேலும் பல சிறு உறுப்புகளால் அமைந்ததாக யிருக்கும். இவ்வாறு மேலும் தொடர்ந்து செல்லும். இதனால் மாதிரி உறுப்புகள் ஒவ்வொரு நிலையிலும் எதேச்சை முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும். எனவே இது பல் நிலை மாதிரி ஆய்வு எனப்படுகிறது. இது மிகச் சரியானதொரு முறையாக இல்லாது போயினும், இதில் பல நன்மைகளும் உள. கடைசியில் உள்ள மாதிரி எடுக்கப்படுவது கடைசி நிலைக்கு முன் உள்ள நிலையில் உள்ள உறுப்பினர்களிடமிருந்து எடுக்கப்படும்.

தற்போது பயிர் அறுவடைச் சோதனைகள் இம் முறையில் தான் நடைபெறுகின்றன. ஒவ்வொரு மாவட்டமும் பல தாலுக்காக்கள் கொண்டது. ஒவ்வொரு தாலுக்காவும் ஒவ்வொரு வகுப்பாகக் கருதப்படுகிறது. ஒவ்வொரு தாலுக்காவும் பல கிராமங்களாகவும், ஒவ்வொரு கிராமமும் பல சர்வே எண்கள் கொண்ட நிலங்களாகவும் அமைந்துள்ளன. ஒவ்வொரு சர்வே எண்ணும் பல உட்பிரிவு எண்கள் கொண்டதாகவும், ஒவ்வோர் உட்பிரிவு எண்ணும் பல வயல்கள் கொண்டதாகவு மிருக்கும். பின்னர் ஒவ்வொரு வயலும் நமக்குத் தேவையான அளவும் பரப்பும் கொண்ட பல்வேறு கூறுகளாக இருக்கும்.

மாவட்டத்தில் ஒரு தாலுக்காவை எதேச்சை முறையில் தேர்ந்தெடுத்த பின்னர் அத் தாலுக்காவில் ஒரு கிராமமும், பின்னர் அக் கிராமத்தில் ஒரு சர்வே எண்ணும், பின்னர் அச் சர்வே எண்ணில் ஒரு வயலும், பின்னர் அவ் வயலில் ஒரு பகுதியும் எதேச்சை முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இம் முறையில் மாதிரி எடுக்கும் முறை பல நிலையில் கையாளப்படுவதால் இது பல் நிலை மாதிரி ஆய்வு எனப்படுகிறது.

வெவ்வேறு நிகழ்திறன் கொண்ட மாதிரி (Sampling with varying probability)

எதேச்சை மாதிரி முறையில் அடங்கிய கொள்கை என்னவெனில் தொகுதியில் ஒவ்வொரு நபருக்கும் சம வாய்ப்புக் கொடுக்கப்பட வேண்டுமென்பதே. சில வேளை ஆய்வின் தன்மையைப் பொறுத்தும் வேறு சில காரணங்களாலும் இக் கொள்கை அப்படியே பின்பற்றப்படுவதில்லை.

சில இடங்களில் உறுப்புகளிடையே அதிக வேறுபாடு தோன்றும். அவ்விடங்களில் சம வாய்ப்புக் கொள்கையைப் பின்பற்றினால் தொகுதியைப் பற்றியுள்ள சரியான மதிப்பீடு கிடைக்காது போகும். இந் நிலைகளில் ஒவ்வொரு நபருக்கும் அதன் முக்கியத்துவத்திற்கேற்றவாறு வாய்ப்புக் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

சில சந்தர்ப்பங்களில் நாம் ஆய்விற்காக எடுத்துள்ள தொகுதியின் குணம் குறித்துள்ள விவரம் எளிதில் கிடைக்காதிருக்கலாம். என்றாலும் அக் குணம் வேறு ஒரு பண்புடன் தொடர்புடையதாகயிருக்கும். உதாரணமாக ஒரு கிராமத்தின் நெற்பயிரின் பரப்பு அக் கிராமத்தின் பாசன வசதியுள்ள நிலப் பரப்பைப் பொறுத்ததாக இருக்கும். ஒவ்வொரு கிராமத்திலும் உள்ள பாசன வசதியுடைய பரப்புத் தெரியலாம். இந் நிலையில் ஆய்வுக்கென தெரிந்தெடுக்க வேண்டிய கிராமங்கள் பாசனப் பரப்பின் அடிப்படையிலிருக்கலாம். இதைக் கீழ்க்கண்டவாறு செய்யலாம்.

தொகுதியிலுள்ள எல்லா உறுப்பினர்களுக்கும் வரிசை எண் கொடுக்க வேண்டும். ஒவ்வோர் உறுப்பினருக்கும் எதிரே தொடர்பு உடைய பண்பின் மதிப்பைக் கொடுக்க வேண்டும். (இங்கு இது பாசன வசதிப் பரப்பாகும்.) பின்னர் நாம் கூட்டு மதிப்புக் (Cumulative) கண்டு ஒவ்வோர் உறுப்புக்கெதிரே

எழுத வேண்டும். கீழே உள்ள எடுத்துக்காட்டைக் காண் போம்.

கிராமத்தின் வரிசை எண்	பாசனப் பரப்பு ஏக்கர்	கூட்டுப் பரப்பு	நிகழ்திறன் அல்லது வாய்ப்பு
1	75	75	75/860
2	55	130	55/860
3	48	178	48/860
4	57	235	57/860
5	99	334	99/860
6	125	459	125/860
7	73	532	73/860
8	76	608	76/860
9	95	703	95/860
10	157	860	157/860
மொத்தம்	860		

தொகுதியின் குணத்தின் மொத்த மதிப்பைக் காண வேண்டும். இங்கு N = 860. நமக்கு 3 (n) நபர்களை எடுக்க வேண்டியிருந்தால் நாம் 860 ஐ உயர்ந்த எண்ணாகக் கருதி 3 இலக்கங்கள் கொண்ட எதேச்சை எண்களிலிருந்து 3 எண்களை எடுக்க வேண்டும். 3 இலக்கங்கள் கொண்ட வரிசையில் 5 வது வரிசையைக் கருதுவதாயிருந்தால், நாம் 029, 265 மற்றும் 689 என்ற மூன்று எண்களை எடுப்போம். எனவே 29, 265 மற்றும் 689 என்ற வரிசை எண்களுக்கேற்ற நபர்களை எடுக்க வேண்டும். இத்தகைய வரிசை எண்கள் இல்லாததால் இவைகள் கற்பனை எண்களேயாகும். இதற்காக நாம் கூட்டு மதிப்பைக் காண வேண்டும். கூட்டு மதிப்பிலிருந்து 29ஆவது நபர் முதல் கிராமத்திலும், 265 ஆவது நபர் 5 ஆவது கிராமத்திலும், 689 ஆவது நபர் 9ஆவது கிராமத்திலும் இருப்பதாகத் தெரிகிறது. இம் முறையில் ஒரு கிராமத்தை ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பல முறைகள் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டிவரும் இது மீண்டும் வரும் முறைக்கு இணையானதாகும். இதில் உள்ள குறை என்னவெனில் கூட்டு மதிப்பைக் கணிப்பதில் உள்ள சிரமம். அதிலும் குறிப்பாக மதிப்புப் பெரியதாகவும் உறுப்பினர் எண்ணிக்கை அதிகமாகவும் இருந்தால் சிரமம் கூடும்.

பயிற்சி

1. பல்வேறு மாதிரி ஆய்வுகள் பற்றி ஒரு கட்டுரை வரைக.

2. கீழ்க்கண்ட தலைப்புகள் பற்றி சுருக்கமாகக் குறிப்பு வரைக

   (1) பகுத்தாய்வு முறை மாதிரி

   (2) ஒழுங்கு முறை மாதிரி

   (3) கூறு முறை

   (4) பல்நிலை மாதிரி

3. ஒரு கிராமத்தில் 325 குடும்பங்கள் உள்ளன. ஒரு சமூகப் பொருளாதார ஆய்விற்குத் தகுந்த ஒரு மாதிரி ஆய்வு முறையைத் தேர்வு செய்து ஆய்விற்கு 5 சதவீத மாதிரிக் குடும்பங்களைத் தேர்வு செய்து காட்டுக.

4. ஒரு தோட்டத்தில் வரிசைக்கு 15 மரங்கள் வீதம் 238 வரிசைகள் உள்ளன உற்பத்தி மதிப்பீடு கணக்கிட ஒரு தகுந்த மாதிரி ஆய்வு முறையை விளக்கி 2 சதவீத மரங்களைத் தேர்ந்தெடுக்க.

5. ஒரு கிராமத்தில் 185 வீடுகள் உள்ளன. இவற்றில் ஒழுங்கு முறை மாதிரியின்படி 10 வீடுகளைத் தேர்வு செய்து காட்டுக.

6. ஒரு மாவட்டத்தில் 6 வட்டங்கள் உள்ளன. அவற்றின் மக்கள் தொகை கீழ்க் கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் 2 வட்டங்களை மக்கள் தொகை அளவிற்கேற்ற நிகழ்திறன் அடிப்படையில் தேர்ந்து எடுத்துக் காட்டுக.

வட்டம்	மக்கள்தொகை
1	1,50,000
2	2,50,000
3	3,50,000
4	4,50,000
5	5,50,000
6	7,50,000

ஓரிலக்க எதேச்சை எண்கள்

கலம் (Column)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
3	3	2	6	1
2	7	0	7	3
1	3	5	5	3
5	7	1	2	1
0	6	1	8	4
8	7	3	5	2
2	1	7	6	3
1	2	8	6	7
1	5	5	1	0
9	0	5	2	8
0	6	7	6	5
2	0	1	4	8
3	2	9	8	9
8	0	2	2	0
5	4	4	2	0

ஈரிலக்க எதேச்சை எண்கள்

கலம்

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
51	51	00	83	63
68	97	87	64	81
30	79	20	69	22
81	69	49	23	72
90	60	73	96	53
46	15	38	26	61
99	05	48	67	26
98	35	55	03	36
11	53	44	10	13
06	71	95	06	79
83	45	19	90	70
49	90	65	97	38
39	84	51	67	11
16	17	17	95	70
13	74	73	52	52

மூவிலக்க எதேச்சை எண்கள்

கலம்

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
642	807	270	546	029
790	186	608	897	265
435	410	099	205	689
218	345	226	433	905
263	626	225	267	531
296	340	928	403	526
835	883	273	307	700
058	569	858	422	469
452	341	221	191	226
757	094	479	348	407
149	322	243	302	047
639	252	212	801	325
648	047	384	924	746
573	469	233	958	782
879	632	569	615	852

இரண்டாம் ஆண்டு

இரண்டாவது தாள்

செயல் முறை

A. பட விளக்கம்

1. இரண்டு குடும்பங்களின் மாதாந்திர செலவு விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களுக்கேற்ற பட்டை விளக்கப் படம், பகுதிப் பட்டைப் படம், அடுத்தடுத்த பட்டைப் படம், சதவீதப் பட்டைப் படம், பை அல்லது வட்டப் படம் வரைந்து இரண்டு குடும்பங்களின் செலவையும் ஒப்பிடுக.

	குடும்பம் 1 மாத வருவாய் ரூ. 500 ரூ	குடும்பம் 2 மாத வருவாய் ரூ 400 ரூ.
உணவு	210	160
துணி	80	80
வீட்டு வாடகை	100	60
கல்வி	30	40
எரிபொருள்	40	20
இதர இனங்கள்	40	40

2. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான படம் வரையவும். கொடுத்துள்ள விவரங்கள் இரண்டாவது ஐந்தாண்டுத் திட்டத்தில் முதலீடாகும்.

பிரிவுகள்	ரூபாய் (கோடியில்)
வேளாண்மை	568
பாசனம் மற்றும் மின் விசை	913
தொழில், சுரங்கம்	890
போக்குவரத்து	1385
சமுதாயப்பணி	945
இதர இனங்கள்	99
மொத்தம்	4800

3. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கான படம் வரைந்து நகர் மற்றும கிராமப்புற மக்களிடையேயுள்ள மாற்றத்தைக் குறிப்பிடுக. படத்தின் மீதான பரிந்துரையையும் தருக.

ஆண்டு	மக்கள் தொகை (பத்து இலட்சம்)	
	நகர்ப் புறம	கிராமப்புறம்
1900	14	36
1910	22	41
1920	30	46
1930	42	49
1940	54	51
1950	69	54
1960	75	56

4. 40 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொருத்தமான வகுப்பு இடைவெளி அடிப்படையில் ஓர் அலைவெண் அட்டவணை அமைக்கவும். மேலும் நீள்சதுரம், அலைவெண் பல்கோணம், அலைவெண் வளைகோடு, உச்சிக்கோடு வரையவும்.

56, 24, 89, 42, 56, 72, 91, 96, 43, 32,
19, 62, 75, 66, 54, 48, 52, 82, 36, 62,
41, 37, 85, 72, 66, 54, 34, 41, 27, 39,
68, 53, 74, 81, 29, 61, 49, 36, 86, 81.

5. கீழே கொடுத்துள்ள அட்டவணை 100 மாணவர்கள் புள்ளியியல் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும். உச்சிக்கோடு வரைந்து நடுவளவு காண்க.

மதிப்பெண்	அலைவெண்
70—80	5
60—70	6
50—60	20
40—50	31
30—40	22
20—30	9
10—20	7
	100

6. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்கள் 50 மூட்டைகளின் எடையாகும் (கி கி). பொருத்தமான அலைவெண் அட்டவணை அமைக்கவும். மேலும் கூடுதல் அலைவெண் அட்டவணை வரைந்து குறைந்த நிலை அல்லது இறங்கு நிலை உச்சிக்கோடு வரையவும்.

42, 74, 40, 60, 82, 115, 41, 61, 75, 63, 68,
53, 110, 76, 84, 50, 67, 65, 78, 77, 56, 95,
49, 77, 80, 79, 79, 54, 73, 59, 81, 100, 66,
69, 104, 90, 84, 76, 42, 64, 69, 70, 80, 72,
50, 79, 52, 103, 96, 51.

7. கீழேயுள்ள அட்டவணை சில செடிகளின் உயரமாகும். இதற்கான உச்சிக்கோடு வரைந்து நடுவன் காண்க.

உயரம் (செமீ)	அலைவெண்
158	3
160	10
162	27
164	40
166	26
168	20
170	9
172	8
174	7

8. கீழே கொடுத்துள்ள 50 மாணவர்களுக்கான எடை விவரத்திற்குப் பொருத்தமான வகுப்பு இடைவெளி அடிப்படையில் அலைவெண் அட்டவணை அமைக்கவும்.

67, 34, 36, 48, 49, 31, 61, 34, 43, 45, 38, 32,
27, 61, 29, 47, 36, 50, 46, 30, 46, 32, 30, 33,
45, 49, 48, 41, 53, 36, 37, 47, 30, 47, 46, 50,
28, 35, 35, 38, 36, 46, 43, 34, 62, 69, 50, 28,
44, 43.

9. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு லாரன்ஸ் வளைகோடு வரையவும்.

சராசரி வருவாய் ரூபாய்	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை	சராசரி செலவு (ரூ.)	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை
45	5	40	4
58	6	50	7
65	8	60	9
75	9	70	6
80	2	75	4

B. மையப் போக்களவுகள்

1. கீழே கொடுத்துள்ள அட்டவணை சில நிறுவனங்களின் மாவு அரைப்பதற்கான செலவைக் கொடுப்பதாகும். சராசரி அரவைச் செலவைக் கணிக்கவும். நடுவளவையும் கணிக்கவும்.

ஒரு பீப்பாய் மாவு அரைப்பதற்கான செலவு (ரூ.)	செயல்படும் நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை
4.40 — 4.79	14
4.80 — 5.19	15
5.20 — 5.59	35
5.60 — 5.99	19
6.00 — 6.39	10
6.40 — 6.79	4
6.80 — 7.19	2
7.20 — 7.59	1
	100

2. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களிலிருந்து சில மையப் போக்களவுகளைக் காண்க.

வகுப்பு இடைவெளி (ரூ.)	அலைவெண்
155 — 157	4
158 — 160	8
161 — 163	26
164 — 166	53
167 — 169	89
170 — 172	62
173 — 175	48
176 — 178	14
179 — 181	6

3. 700 தொழிலாளர் குடும்பங்களுக்கான சராசரி வருமானத்தைக் காண்க.

மாத சராசரி வருமானம் (ரூ.)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
110 — 115	60
115 — 120	120
120 — 125	210
125 — 130	201
130 — 135	70
135 — 140	25
140 — 145	11
145 — 150	3
	700

4. ஒரு சில செடிகளின் உயரம் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கூட்டல் சராசரி, நடுவண் மற்றும் மோட்டளவுகளைக் காண்க.

உயரம் (செமீ)	செடிகளின் எண்ணிக்கை
30 — 39	15
40 — 49	46
50 — 59	75
60 — 69	53
70 — 79	40
80 — 89	18
90 — 99	3

5. கீழேயுள்ள அட்டவணைக்கான சராசரி மற்றும் மோட்டளவு காண்க.

பொருள்களின் அளவு (ரூ.)	அலைவெண்
4-க்குக் குறைவானது	3
4 — 5	8
5 — 6	28
6 — 7	59
7 — 8	66
8 — 9	27
9 — 10	6
10-க்கு அதிகமானது	3
	200

6. கீழேயுள்ள அட்டவணையிலிருந்து சராசரி, மோட்டளவு காண்க.

வகுப்பு இடைவெளி (செமீ)	அலைவெண்
16 — 17	3
17 — 18	13
18 — 19	23
19 — 20	31
20 — 21	18
21 — 22	9
22 — 23	2
23 — 24	1

7. கீழேயுள்ள அட்டவணையின் நடுவளவு, மோட்டளவு காண்க.

வகுப்பு இடைவெளி (ரூ.)	அலைவெண்
0 — 5	10
5 — 10	12
10 — 15	17
15 — 20	20
20 — 25	20
25 — 30	18
30 — 35	11
35 — 40	10

8. கீழேயுள்ள பரவலின் சராசரி, மோட்டளவு காண்க.

வகுப்பு இடைவெளி (கிகி)	அலைவெண்
10 — 20	5
20 — 30	9
30 — 40	13
40 — 50	21
50 — 60	20
60 — 70	15
70 — 80	8
80 — 90	3

9. சராசரி, நடுவளவு மற்றும் மோட்டளவுகளைக் கீழே யுள்ள பரவலுக்குக் காண்க.

வகுப்பு இடைவெளி (ரூ.)	அலைவெண்
20 — 25	50
25 — 30	70
30 — 35	100
35 — 40	180
40 — 45	150
45 — 50	120
50 — 55	70
55 — 60	60

10. 100 தொழிலாளர்களின் சராசரி வருமானம் ரூ. 180 எனக் கணிக்கப்பட்டுள்ளது. பின்னர் இரு தொழிலாளர்களின் சரியான வருமானமான ரூ. 197 மற்றும் ரூ. 185க்குப் பதிலாக ரூ. 297 மற்றும் ரூ. 165 என்று தவறுதலாகக் கணிக்கப்பட்ட தாகத் தெரியவந்தது. சரியான சராசரி காண்க.

11. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு 'Q_1' மற்றும் 'Q_3' கால் அளவுகள் காண்க. மேலும் முதல் மற்றும் மூன்றாம் ஐந்தளவுகள் காண்க. D_4, D_7, D_9, P_{20}, P_{70} மற்றும் P_{90} அளவுகளும் காண்க.

15, 35, 10, 47, 25, 52, 37, 42, 48

12. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்குக் கேட்கப்பட்டுள்ள மையப் போக்களவுகளைக் காண்க.

மதிப்பு ரூ.	அலைவெண்
20	4
27	7
35	9
38	15
46	8
50	6

(i) Q_1 (ii) Q_3 (iii) முதல் ஐந்தளவு (iv) நான்காம் ஐந்தளவு (v) D_3 (vi) D_5 (vii) P_{20} (viii) P_{40} (ix) P_{70}.

13. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு மையப் போக்களவுகளைக் காண்க. Q_1, Q_3, முதல் ஐந்தளவு, மூன்றாம் ஐந்தளவு, D_5, D_7, P_{20}, P_{50}, P_{70}.

வகுப்பு (செமீ)	அலைவெண்
0 — 5	4
5 — 10	7
10 — 15	9
15 — 20	15
20 — 25	8
25 — 30	7

14. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கான பெருக்கல் சராசரி காண்க.

(i) 250, 489, 353, 757, 982
(ii) 983, 1250, 456, 7951, 2845
(iii) 450, 987, 1215 395, 285

15. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்குப் பெருக்கல் சராசரி காண்க.

	மதிப்பு	அலைவெண்
(i)	25	4
	38	7
	49	4
	35	2
(ii)	290	2
	457	3
	625	5
(iii)	195	3
	252	4
	172	3

16. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்குத் தலைகீழ் சராசரி காண்க.

(i) 25, 86, 45, 42, 50
(ii) 49, 25, 40, 50, 12
(iii) 5, 7, 9, 10, 15

17. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்குத் தலைகீழ் சராசரி காண்க.

	x	f
(i)	20	4
	30	5
	40	2
	50	4

	x	f
(ii)	25	2
	35	4
	55	77
	45	6
	65	1

C. சிதறலளவுகள்

1. கீழேயுள்ள அலைவெண் பரவலின் மூலவிலக்கம் அல்லது தரவிலக்கம் காண்க.

உயரம் செமீ	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
59 — 61	3
61 — 63	12
63 — 65	54
65 — 67	111
67 — 69	128
69 — 71	85
71 — 73	30
73 — 75	6
75 — 77	1

2. 260 விவசாயிகள் தங்களது அன்றாடத் தேவைக்காக நடந்த தூரத்தின் மூலவிலக்கம் அல்லது தரவிலக்கம் காண்க.

நடந்த தூரம் கிமீ.	விவசாயிகளின் எண்ணிக்கை
1	19
3	52
5	70
7	39
9	24
13	21
15	14
17	12
19	9

3. இரு கால் அளவுகளின் இடைவெளி அளவைக் கீழேயுள்ள பரவலுக்குக் காண்க.

வாராந்திர கூலி (ரூ.)	அலைவெண் (தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை)
40 — 43	4
43 — 46	15
46 — 49	27
49 — 52	36
52 — 55	24
55 — 58	18
58 — 61	9
61 — 64	7

4. கீழேயுள்ள பரவலுக்கான வேறுபாட்டின் கெழுவெண் காண்க.

வாராந்திர கூலி (ரூ.) (நடுவளவு)	அலைவெண் (நபர்களின் எண்ணிக்கை)
38	27
44	72
50	135
56	170
62	285
68	175
74	96
80	28
86	12

5. கீழேயுள்ள பரவலில், சராசரி மற்றும் நடுவளவுகளை ஆரம்பமாக வைத்து சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation) காண்க.

நீளம் நடுவளவு (செமீ)	அலைவெண் (அலகுகளின் எண்ணிக்கை)
4·0	2
4·2	7
4·4	10
4·6	35
4·8	50
5·0	90
5·2	52
5·4	26
5·6	12
5·8	9
6·0	7

6. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கான சராசரி விலக்கம் மற்றும் மூலவிலக்கம் காண்க.

ஒரு நிமிட அழைப்பு இடைவெளி	அழைப்பின் எண்ணிக்கை
0 — 1	12
1 — 2	30
2 — 3	21
3 — 4	16
4 — 5	11
5 — 6	5
6 — 7	2
7 — 8	2
8 — 9	1

7. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு மூலவிலக்கத்தையும், கால்ம விலக்கத்தையும் காண்க.

வயது (ஆண்டு)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
20 — 25	33
25 — 30	112
30 — 35	152
35 — 40	154
40 — 45	136
45 — 50	118
50 — 55	96
55 — 60	74
60 65	54
65 — 70	37
70 — 75	34

8. கீழேயுள்ள அட்டவணைக்கான கால்ம விலக்கத்தைக் காண்க.

அளவு செமீ.	அலைவெண்
4 — 8	6
8 — 12	10
12 — 16	18
16 — 20	30
20 — 24	15
24 — 28	12
28 — 32	10
32 — 36	6
36 — 40	3

9. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு மூலவிலக்கத்தையும், வேறுபாட்டுத் துணை அளவையும் காண்க.

வகுப்பு இடைவெளி (கிகி)	அலைவெண்
0 — 10	5
10 — 20	10
20 — 30	20
30 — 40	40
40 — 50	30
50 — 60	20
60 — 70	10
— 80	5

10. கீழேயுள்ள அட்டவணைக்கு மூலவிலக்கம் காண்க.

வகுப்பு இடைவெளி (ஆண்டு)	அலைவெண்
25 — 34	4
35 — 44	20
45 — 54	38
55 — 64	24
65 — 74	10
75 — 84	4

11. இரண்டு விளையாட்டு வீரர்கள் 10 இன்னிங்ஸ் விளையாட்டில் பெற்ற ஓட்ட விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. யார் நிலையான விளையாட்டு வீரர் என்பதைக் காண்க.

(அ)	25	65	45	0	50	100	35	80	10	90
(ஆ)	40	55	50	35	50	65	45	60	40	60

D. நேர்கோடு பொருத்தல்

1. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு சிறந்த பொருத்தமான கோடு காண்க.

ஆண்டு	நுகர்வு (டன்)
1920	27
19-1	29
1922	28
1923	31
1924	30
1925	32
1926	36
1927	37
1928	38
1929	40
1930	42

2. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்தி 1951க்கான மதிப்பீட்டைக் காண்க.

ஆண்டு	மக்கள் தொகை (பத்து இலட்சம்)
1881	23
1891	31
1901	39
1911	50
1921	63
1931	76
1941	92

E. உடன் தொடர்பளவு

1. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்காக உடன் தொடர்பளவைக் காண்க.

ஆண்டு	பருத்தி ஏற்றுமதியின் மதிப்பு (கோடி ரூபாய்)	பருத்தி இறக்குமதியின் மதிப்பு (கோடி ரூபாய்)
1913 — 14	42	56
1917 — 18	44	49
1919 — 20	58	53
1920 — 21	55	58
1923 — 24	89	65
1929 — 30	96	76
1931 — 32	66	58

2. கீழே விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	x	y
சராசரி	65	67
மூலவிலக்கம்	3·5	2.5
உடன் தொடர்பளவு	0·8	

(i) இரண்டு போக்குக் கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) y யின் மதிப்பு 70 என்றிருந்தால் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. x ன் மீதான y யின் போக்குக் கோடும், y யின் மீதான x ன் போக்குக் கோடும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$y = 0.80\,x + 25$

$x = 0.45\,y + 30$

x மற்றும் y களுக்கிடையேயுள்ள உடன் தொடர்பளவு (r) காண்க.

4. x மீதான y ன் போக்குக் கோடும், y மீதான x ன் போக்குக் கோடும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$y = 0.9\,x + 2.3$

$x = 0.4\,y + 0.86$

x மற்றும் y க்கான உடன் தொடர்பளவு காண்க.

5. 12 தம்பதிகளின் வயது விவரம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவர்களின் வயதின் தொடர்பளவைக் காண்க.

கணவனின் வயது	மனைவியின் வயது
25	18
22	15
28	20
26	17
35	22
20	14
22	16
40	21
20	15
18	14
19	15
25	23

6. கீழேயுள்ள அட்டவணை, தந்தை மகன்களின் உயரத்தைக் காட்டும். இவர்களின் உயரத்தின் உடன் தொடர்பளவைக் காண்க

தந்தையின் உயரம் (செமீ)	மகனின் உயரம் (செமீ)
167	165
168	166

தந்தையின் உயரம் (செமீ)	மகனின் உயரம் (செமீ)
164	167
167	168
172	168
170	169
170	171
169	172
173	173

7. ஓர் உடன் தொடர்பு அட்டவணையின் போக்குக் கோடுகளில் சமன்பாடுகள் கீழ்வருமாறு. உடன் தொடர்பளவு காண்க.

$$5x = 6y + 20$$
$$100y = 768x - 3608$$

8. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்குப் போக்குக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

$\bar{x} = 125$ $\sigma_x = 15$

$\bar{y} = 80$ $\sigma_y = 9$

$r = 0.55$

9. கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுத்துள்ள விவரங்களிலிருந்து x மற்றும் y யின் விவரங்களுக்கான உடன் தொடர்பளவு காண்க.

x	y
57	113
59	117
62	126
63	126
64	130
65	129
55	111
58	116
57	112

10. x மற்றும் y விவரங்களின் வேறுபாட்டின் தொடர்பளவைக் காண்க,

x	y
50	102
51	107
52	106
53	108
54	113
55	117
56	127
58	134
61	136

11. இரு பொருள்களின் விலைகள் மாறிக் கொண்டே இருக்கின்றன. இவ்விரு பொருள்களின் விலை நிலவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவைகளின் விலைகளிடையேயுள்ள உடன் தொடர்பைக் காண்க.

ஆண்டு	x பொருளின் விலை ரூ.	y பொருளின் விலை ரூ.
1960	85	64
1961	65	71
1962	77	85
1963	88	60
1964	99	71
1965	102	85
1966	87	69
1967	71	70

F. வரிசையுறவு

1. இரு பேராசிரியர்கள் 10 மாணவர்களுக்குக் கொடுத்த வரிசை முறை (rank) கீழ் வருமாறு. இவர்கள் கொடுத்த மதிப்பெண்களிடையேயுள்ள வரிசை உறவளவைக் காண்க.

மாணவர் வரிசை	பேராசிரியர் A கொடுத்துள்ள வரிசை	பேராசிரியர் B கொடுத்துள்ள வரிசை
1	1	3
2	6	5
3	5	8
4	10	4
5	3	7

மாணவர் வரிசை	பேராசிரியர் A கொடுத்துள்ள வரிசை	பேராசிரியர் B கொடுத்துள்ள வரிசை
6	2	10
7	4	2
8	9	1
9	7	6
10	8	9

2. 10 மாணவர்கள் 2 விடைத்தாள்களில் பெற்றுள்ள வரிசை முறை கீழ் வருமாறு. வரிசை முறை உடன் தொடர்பளவு காண்க.

முதல் தாள்	இரண்டாம் தாள்
3	6
5	4
8	9
4	8
7	1
10	2
2	3
1	10
	5
9	7

3. 10 மாணவர்கள் 2 விடைத்தாள்களில் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் கீழ் வருமாறு. வரிசை முறைத் தொடர்பளவைக் காண்க.

முதல் தாள்	இரண்டாம் தாள்
45	71
70	68
41	35
49	32
50	48
25	43
40	58
62	57
65	70
48	65

G. வேறுபாட்டின் பகுப்பாய்வு

1. மூன்று மாவட்டங்களில் நான்கு ரக நெல் மகசூல் கீழ்வருமாறு. வேறுபாட்டைக் கீழ்வரும் விதங்களில் ஆய்க.

(1) ரகங்களின் இடையே வேறுபாடு
ரகங்களின் ஊடே வேறுபாடு

(2) மாவட்டங்களின் இடையே வேறுபாடு
மாவட்டங்களின் ஊடே வேறுபாடு

மாவட்டம்	ரகம் 1	2	3	4
1	20	25	22	21
2	23	26	25	22
3	26	27	28	23

2. கீழேயுள்ள விவரங்களின் அடிப்படையில்

(1) ரகங்களின் ஊடேயும் இடையேயும் வேறுபாடு காண்க.

(2) செயல் முறைகளினிடையேயும் ஊடேயும் வேறுபாடு காண்க.

ரகங்கள்	செயல் முறைகள் 1	2	3	4
1	20	25	32	35
2	35	30	25	22
3	25	30	35	26
4	40	35	20	21

H. நுண்மையின் சோதனை

1. ஒரு பகடைக்காய் 50 தடவைகள் உருட்டப்பட்டது. வெற்றிவாய்ப்பு $\frac{1}{3}$. வெற்றியடைந்த முறைகள் 20. பகடைக்காய் நல்லதுதானா என்பதை ஆய்க.

2. ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 150 செமீ. அவர்களின் மூல விலக்கம் 15 செமீ. 400 மாணவர்கள் கொண்ட பள்ளியில் மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 155 செமீ. இது ஒரு குறிப்பிட்ட வேறுபாட்டைக் குறிக்கிறதா ?

3. மாணவர்களிடையே ஒரு சோதனையை நடத்தியதில் மதிப்பெண்களின் மூல விலக்கம் 25 ஆண், பெண் மாணவர்களிடையே சோதனையை நடத்தியதில் சராசரி மதிப்பெண் கீழ் வருமாறு :

	ஆண்	பெண்
எண்ணிக்கை	25	36
சராசரி மதிப்பு	120	140

ஆண், பெண் மாணவர்களிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உளதா?

4. நாட்டில் ஆய்வு நடத்தியபோது ஒரு நோயின் தாக்குதல் 2 சதவீதமாகக் கருதப்பட்டது. 500 மாணவர்கள் கொண்ட கல்லூரியில் 15 மாணவர்களும், 1500 மாணவர்கள் கொண்ட பிறிதொரு கல்லூரியில் 10 மாணவர்களும் அந் நோயினால் பாதிக்கப்பட்டிருந்தனர். இவர்களிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உளதா எனக் காண்க.

5. ஒரு குறிப்பிட்ட ஆசிரியரின் எழுத்தில் 5 சதவீத சொற்கள் அன்னிய சொற்கள். 6000 சொற்கள் கொண்ட பகுதயில் 50 சொற்கள் அன்னிய மொழியாகக் கருதப் பட்டன. இது குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைக் குறிக்கிறதா ?

6. ஒரு புகழ் பெற்ற நிறுவனம் தனது டயர், சராசரி 16000 கி மீ வரை எவ்வித பழுதுமின்றி ஓடும் என்றும், சராசரி விலக்கம் 1500 கி மீ என்றும் வெளிப்படுத்தியுள்ளது. 100 டயர்கள் வாங்கியதில் சராசரி ஓட்டம் 15500 கி மீ என்று தெரிய வந்தது. இந்த டயர்கள் அந்த நிறுவனத்தின் உற்பத்தி தானா?

7 தங்களது மின் குழல் விளக்குகள் சராசரி 8000 மணி நேரம் எரியும் என்றும், மூலவிலக்கம் 500 மணி நேரம் என்றும் ஒரு நிறுவனம் குறிப்பிட்டுள்ளது. 50 மின் குழல்கள் வாங்கி

யதில் அவற்றின் ஆயுள் 8500 மணி நேரம் என்று தெரிந்தது. இப் பொருள் அந் நிறுவனத்தின் பொருள் தானா?

8. ஒரு நாணயத்தை 100 தடவை சுண்டியதில் 65 தடவை தலை தோன்றியது. அது நல்ல நாணயம் தானா?

I. பண்புச் சேர்க்கை

1. 1620 மாணவர்களின் விவரங்களிலிருந்து உணவுப் பழக்கத்திற்கும் கண் பார்வைக்கும் உள்ள பண்புச் சேர்க்கை அளவைக் காண்க.

பார்வை	உணவுப் பழக்கம்	
	சைவம்	அசைவம்
குறைபாடு	200	107
சரியானவை	813	500

2 தடுப்பு ஊசிக்கும், பாதுகாப்பிற்கும் உள்ள பண்புச் சேர்க்கையைக் காண்க.

	பாதிக்கப்பட்டோர்	பாதிக்கப்படாதோர்
தடுப்பு ஊசி எடுத்தோர்	10	80
தடுப்பு ஊசி இல்லாதோர்	20	40

3. கீழேயுள்ள விவரங்களிலிருந்து A மற்றும் B என்ற பண்புகள் சுயமானவையா எனக் காண்க

$(A) = 100 \qquad (B) = 120$

$(AB) = 40 \qquad (N) = 300$

4. கடைநிலை அலைவெண்களை, நேர் எதிர் அலைவெண்களிலிருந்து காண்க.

$$(AB) = 200; \ (A\beta) = 100; \ (B\alpha) = 160; \ (\alpha\beta) = 80$$

5. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களிலிருந்து Aயும் Bயும் சுயமானவையா அல்லது நேர் தொடர்புடையவையா

அல்லது எதிர் தொடர்புடையவையா எனக் காண்க.

(i) $N = 1000$; $(A) = 470$; $(B) = 620$; $(AB) = 320$

(ii) $(AB) = 512$; $(B\alpha) = 96$; $(A\beta) = 288$; $(\alpha\beta) = 245$

(iii) $(A) = 245$; $(AB) = 147$; $(\alpha) = 285$; $(B\alpha) = 190$

6. கல்லூரிப் பயிற்சி முறைக்கும் வெற்றிக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

	வெற்றி	தோல்வி	மொத்தம்
ஆசிரியர் கல்லூரி	40	60	100
பல்கலைக்கழகம்	55	45	100
	95	105	200

J. குறியீட்டெண்கள்

1. கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கான விலைக் குறியீட்டு எண் கணிக்கவும்.

	1935		1945	
பொருள்	விலை ரூ.	அளவு கி.	விலை ரூ.	அளவு கி.
அ	4	50	10	40
ஆ	3	10	9	2
இ	2	5	4	2

2. கீழேயுள்ள அட்டவணையிலிருந்து ஃபிசரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கணிக்கவும்.

பொருள்	விலை ரூபாய் 1955	விலை ரூபாய் 1956	மூல அளவு	அளவு 1955	அளவு 1956
அரிசி	20.00	15.00	குவிண்டால்	1	1.25
உப்பு	4.00	4.75	லிட்டர்	10	8
வாடகை	10.00	12.00	மாதம்	1	1
துணி	10.50	12.50	மீட்டர்	20	18

3. கீழே கொடுத்துள்ள 1960 க்கான விவரங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு 1970 க்கு விலைக் குறியீட்டெண் கணிக்கவும்.

பொருள்கள்	1960 விலை (ரூ)	1960 அளவு (கி)	1970 விலை (ரூ.)	1970 அளவு (கி)
அ	4	1	10	2
ஆ	1	10	4	25
இ	20	2	90	3
ஈ	10	5	15	20

4. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு ஃபிசரின் விழுமிய குறியீட்டு எண் கணிக்கவும்.

பொருள்கள்	அடிப்படையாண்டு விலை (ரூ.)	அடிப்படையாண்டு அளவு (கி)	நடப்பாண்டு விலை (ரூ.)	நடப்பாண்டு அளவு (கி)
அ	5	2	10	3
ஆ	3	10	6	25
இ	20	3	60	4
ஈ	10	6	15	20

5. கீழேயுள்ள அட்டவணை நான்கு பொருள்களின் உற்பத்தியையும் விலையையும் கொண்டது. 960—61ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு 1969—70க்கான ஃபிசரின் விலை குறியீட்டெண் கணிக்கவும்.

பொருள்	உற்பத்தி (டன்) 1960—61	உற்பத்தி (டன்) 1969—70	விலை (ரூ.) 1960—61	விலை (ரூ.) 1969—70
அ	250	300	150	130
ஆ	100	120	120	200
இ	20	30	600	1000
ஈ	10	20	200	300

K. காலத் தொடர் வரிசை

1. கீழேயுள்ள விவரங்கள் இந்தியாவின் ஏற்றுமதி மதிப்பின் குறியீட்டு எண்களைக் கொடுக்கும். 5 ஆண்டு நகரும் சராசரி முறையில் நேர்கோட்டுப் போக்கைப் பொருத்தி விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்தவும்.

ஆண்டு	குறியீட்டெண்
1938 — 39	100.0
1939 — 40	119.8
1940 — 41	130.3
1941 — 42	1[illegible]5.9
1942 — 43	184.6
1943 — 44	227.4
1944 — 45	244.3
1945 — 46	240.8
1946 — 47	284.9
1947 — 48	372.2
1948 — 49	421.4
1949 — 50	435.7
1950 — 51	482.9
1951 — 52	711.7
1952 — 53	500.0
1953 — 54	461.0

2 ஒரு நூல் நிலையத்திலிருந்து தினந்தோறும் வழங்கப் பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை 6 வாரங்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தொடரில் உள்ள பருவ மாற்றத்தை (தினம்) கணிக்கவும்.

புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை

வாரம்	திங்கள்	செவ்வாய்	புதன்	வியாழன்	வெள்ளி	சனி
1	25	43	49	46	51	62
2	18	34	52	49	53	70
3	12	25	48	51	62	66
4	19	22	49	61	71	72
5	21	32	43	53	61	72
6	13	30	27	46	50	60

3. உந்து வண்டிக்கான எண்ணெய்யின் தேவைக்கான நேர்கோட்டைப் பொருத்தவும்.

ஆண்டு	அளவு (லட்சம் லிட்டர்)	ஆண்டு	அளவு (லட்சம் லிட்டர்)
1946	61	1952	95
47	66	53	100
48	72	54	108
49	76	55	110
50	82	56	114
51	90		

4. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு $y = mx + c$ என்ற முறையில் ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்தவும்.

ஆண்டு	உற்பத்தி (இலட்சத்தில்)
1961	8
1962	12
1963	15
1964	18
1965	20
1966	23
1967	27
1968	30

5 மூன்றாண்டு நகரும் சராசரி கணித்து, நீண்ட போக்கை நிர்ணயிக்கவும்.

ஆண்டு	விலை (ரு.)
1920	97
1921	109
1922	108
1923	112
1924	113
1925	110
1926	115
1927	116
1928	118
1929	119
1930	120
1931	122
1932	124

6. தொடர்ந்த 7 ஆண்டுகளின் மீன் வியாபாரம் (ரூபாய் இலட்சத்தில்) கீழ்வருமாறு :

நீள் கோட்டைப் பொருத்தி 8 வது ஆண்டின் விற்பனையை மதிப்பிடுக.

32, 45, 36, 78, 94, 112, 136.

L. ஆயுள் விவரம

1. செப்பனிடா இறப்பு விகிதம் கணிக்கவும்.

	நடுவாண்டு மக்கள் தொகை	இறந்தவர்
(i)	1870	17
(ii)	1925	19
(iii)	200050	1890
(iv)	19005	165
(v)	17050	170

2. செப்பனிடா பிறப்பு விகிதம் கணிக்கவும்.

	நடுவாண்டு மக்கள் தொகை	பிறந்தவர்
(i)	19250	195
(ii)	20050	350
(iii)	19500	320
(iv)	20000	450
(v)	25000	420

3. மக்களின் வயது வாரி, பரவல் கீழ்வருமாறு :

40–50, 50–60 மற்றும் 60–70 வயதிற்கான குறிப்பிட்ட இறப்பு விகிதம் ஆண் பெண்களுக்குத் தனித்தனியே கணிக்கவும்.

வயது	ஆண்	இறப்பு	பெண்	இறப்பு
0 — 10	18900	287	19000	103
10 — 20	17000	295	18000	250
20 — 30	20000	300	20500	350
30 — 40	40000	356	39000	400

வயது	ஆண்	இறப்பு	பெண்	இறப்பு
40 — 50	29000	258	28000	350
50 — 60	19000	250	18500	300
60 — 70	10000	325	9500	350
70க்கு மேல்	9000	350	8300	400

M. ஆயுள் அட்டவணை

1. ஓர் ஆயுள் அட்டவணையைக் கீழேயுள்ள விவரங்களின் அடிப்படையில் தயார் செய்யவும்.

x	1.x
20	10,000
21	9,870
22	9,740
23	9,600
24	9,470
25	9,330
26	9,190
27	9,050
28	8,900
29	8,740
30	8,580

(i) 20 வயதுடைய நபர் மேலும் 10 ஆண்டுகள் வாழ்வதற்கான சாத்தியக் கூறு கண்டுபிடிக்கவும்.

(ii) 25 வயதுடைய ஒருவர் 30 வயதில் இறப்பதற்கான சாத்தியக்கூறு என்ன?

2. கீழேயுள்ள அட்டவணையில் விடுபட்ட இடத்தை நிரப்புக.

வயது	lx	dx	px	gx	Lx	Tx
30	762230	—	—	—	—	—
31	758580	—	—	—	—	—

N. மாதிரி ஆய்வுகள்

1. ஒரு கிராமத்தில் 235 வீடுகள் உள்ளன. எதேச்சை எண்கள் மூலம் i) 5 சதவீத (ii) 10 சதவீத மாதிரி வீடுகளைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

2. ஒவ்வொரு வரிசையும் 25 வீடுகள் கொண்ட 15 வரிசைகள் ஒரு குடியிருப்பில் உள்ளன. ஒரு வரிசையைத் தேர்ந்தெடுத்து 5 சதவீத வீடுகளைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்,

3. ஒரு தென்னந் தோப்பில் 25 வரிசை மரங்கள் உள்ளன. வரிசை முறை ஆய்வின் மூலம் மகசூல் மதிப்பீட்டிற்காக 5 மரங்கள் கொண்ட ஒரு கூறைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

4. ஒரு தோட்டத்தில் 95 மரங்கள் பரந்து காணப்படுகின்றன. ஒழுங்கு முறை ஆய்வின் மூலம் 10 சதவீத மரங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

5. ஒரு கிராமத்தில் 250 சர்வே எண்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு கூறும் 3 சர்வே எண்கள் கொண்ட 5 கூறுகளை ஆய்விற்காகத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

6. ஒரு மாவட்டத்திலுள்ள 10 தாலுக்காக்களும் அதிலுள்ள கிராமங்களின் எண்ணிக்கையும் கீழ் வருமாறு. பல்நிலை மாதிரியில் 3 கிராமங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

தாலுக்கா	கிராமங்களின் எண்ணிக்கை
1	42
2	57
3	65
4	28
5	40
6	53
7	93
8	70
9	25
10	77

7. மேலேயுள்ள அட்டவணையிலிருந்து ஒரு கிராமத்தை உருவிற்கேற்ற சாத்தியக்கூறு அடிப்படையில் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

O. நிகழ்திறன்

1. 4 சிவப்புப் பந்துகளும், 6 கருப்புப் பந்துகளும் கொண்ட பையிலிருந்து 5 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டன. கீழ்வரும் நிலை உருவாவதற்கான சாத்தியக்கூறு அல்லது நிகழ்திறன் காண்க.

(1) சிவப்பு 2 ; கருப்பு 3
(2) சிவப்பு 3 ; கருப்பு 2
(3) சிவப்பு 4 ; கருப்பு 1
(4) சிவப்பு 1 ; கருப்பு 4
(5) சிவப்பு 0 ; கருப்பு 5

2. 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், 5 கருப்புப் பந்துகளும், 6 சிவப்புப் பந்துகளும் கொண்ட பையிலிருந்து 1 பந்து எடுக்கப் படுகிறது. அது சிவப்பாகவோ அல்லது வெள்ளையாகவோ இருப்பதற்கான வாய்ப்பு என்ன ?

3. இரு பகடைக் காய்கள் உருட்டப்படுகின்றன. அவை களின் பக்க அளவுகளைக் கூட்டினால் 10 வருவதற்கான சாத்தியக்கூறு என்ன ?

4. கீழேயுள்ள எண்களிலிருந்து 2 எண்கள் எடுக்கப் பட்டன. அவைகளின் கூட்டுத்தொகை 8 ஆக இருப்பதற்குரிய வாய்ப்பு என்ன ?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

5. இரண்டு நேர் எண்களின் கூட்டுத் தொகை 10. அவை களின் பெருக்கற் பலன் 20ஐ விட அதிகப்படாமல் இருப்பதற் கான சாத்தியக் கூறு என்ன ?

6. 10 ஆண்கள், 5 பெண்கள், 5 குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குழுவிலிருந்து 5 நபர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டனர். அதில் 3 நபர்கள் பெண்களாகயிருப்பதற்கான வாய்ப்பு என்ன ?

7. 1 சிவப்பு, 4 கருப்பு, 6 வெள்ளை நிறப் பந்துகள் கொண்ட பையிலிருந்து 4 வெள்ளை, 2 கருப்புப் பந்துகளை மீண்டும் வராமுறையில் எடுப்பதற்கான சாத்தியக் கூறு என்ன ?

கலைச் சொற்றொடர்கள்

1. Probability – நிகழ்திறன்

Additional Theorem of probability	—	நிகழ்திறனின் கூட்டு விதித் தேற்றம்
Apriori probability	—	முன்னோடி ஊக அளவு (முன் ஊக அளவு)
Binomial distribution	—	ஈருறுப்புப் பரவல்
Binomial expansion	—	ஈருறுப்பு விரிவாக்கம்
Chances	—	வாய்ப்புகள்
Combination	—	கூட்டு அல்லது குழுக்கள்
Complementary	—	முழுமை செய்யும் இணை
Compound events	—	கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்
Conditional probability	—	நிபந்தனை நிகழ்திறன்
Equally likely events	—	ஒரே மாதிரி சம நிகழ்ச்சிகள் (ஒரே வித சம நிகழ்ச்சிகள்)
Exhaustive event	—	முற்று நிகழ்ச்சி
Experiment or trial	—	சோதனை
Event	—	நிகழ்ச்சி
Failure of event	—	நிகழாத் திறன்
Independent events	—	சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்
Mathematical probability	—	கணித ஊக அளவு
Multiplication Theorem of probability	—	ஊக அளவையின் பெருக்கு நியதி அல்லது நிகழ்திறனின் பெருக்கல் விதித் தேற்றம்
Mutually exclusive events	—	ஒன்றை யொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள் அல்லது பரிமாற்ற நிகழ்ச்சிகள்
Normal curve	—	ஒழுங்கு வளைகோடு அல்லது இயல் வளைகோடு

Normal distribution	—	மரபு பரவல் அல்லது இயல் நிலைப் பரவல்
Probability	—	நிகழ்திறன் அல்லது சாத்தியக் கூறு
Statistical probability	—	புள்ளியியல் ஊக அளவு
Theoretical distribution	—	கோட்பாட்டுப் பரவல்

2. Sample Surveys — மாதிரி ஆய்வுகள்

Complete enumeration	—	முழுக் கணிப்பு
Continuous universe	—	தொடர் முழுமை
Errors of non-response	—	பதிலில்லாப் பிழைகள்
Estimates	—	(தோராய) மதிப்பீடுகள்
Expectations	—	எதிர் பார்ப்புகள்
Finite Universe	—	முடிவுள்ள முழுமை
Hetrogeneous	—	பலவிதமான
Homogeneous	—	ஒருபடித்தான அல்லது ஒரே சீரான அல்லது ஒருமைப் பாட்டுடைய
Hypothetical Universe	—	எடுகோள் தொகுதி
Infinite Universe	—	முடிவில்லாத் தொகுதி
Miniature Universe	—	சிறு தொகுதி (குறுந் தொகுதி)
Non-sampling error	—	சரியான மாதிரிக் கூறு முறை இன்றேல் நேரும் பிழை
Probability sampling	—	நிகழ்திறன் கோட்பாட்டு மாதிரி
Purposive sampling	—	உள்நோக்கு மாதிரி
Random sampling	—	இயைபிலா மாதிரிக் கூறு
Random sampling error	—	இயைபிலாமாதிரிப் பிழை
Sample	—	மாதிரி
Sample frame	—	மாதிரிப் பட்டியல்
Sample Statistic	—	மாதிரிப் புள்ளி
Sample surveys	—	மாதிரி ஆய்வுகள்
Sample units	—	மாதிரி அலகுகள்

Sampling with replacement	—	மீண்டும் வரும் மாதிரி முறை
Sampling without replacement	—	மீண்டும் வரா மாதிரி முறை
Standard error	—	கூறுபண்புகளின் திட்டவிலக்கம்
Unbiased Estimates	—	பழுதற்ற மதிப்பீடுகள் அல்லது ஓரமற்ற மதிப்பீடுகள்
Universe	—	முழுமை

3. Theory of Sampling — மாதிரி முறைக் கொள்கைகள்

Biased	—	ஓரமுடைத்து அல்லது ஒருபுறச் சாய்வுள்ளது
Confidence limits	—	நம்பக எல்லைகள்
Law of inertia of large numbers	—	பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை விதி
Law of statistical regularity	—	புள்ளியியல் ஒழுங்கு முறை விதி
Normal probability Integral table	—	இயல் மரபு நிகழ்திறன் அட்டவணை
Proportion	—	விகிதம்
Random sample	—	இயைபிலா மாதிரி
Sampling distribution	—	மாதிரிகளின் பரவல்
Sampling distribution of Statistic	—	மாதிரிப் புள்ளியியலின் பரவல்
Sampling variance	—	மாதிரியின் வேறுபாட்டு வர்க்கம்
Standard Error	—	புள்ளியியல் அளவின் மூலக் குறை அல்லது தரப்பிழை
Standard Error of sample mean	—	மாதிரிகளின் சராசரிகளின் தரப் பிழை
Statistic	—	புள்ளியியல் அளவு
Variance	—	வேறுபாட்டின் வர்க்கம் அல்லது மாறுபாடு

4. Test of significance — நுண்மையின் சோதனை

Error of judgement	—	ஆய்வின் முடிவின் குறை
Interpretation	—	விளக்கம்
Normal deviate	—	இயல் விலக்கம் அல்லது இயல் வேறுபாடு
Null Hypothesis	—	சூன்யக் கோட்பாடு
Tolerance limit	—	தாங்கும் எல்லை அல்லது வரையறை எல்லை
Types of sample	—	மாதிரியின் வகைகள்

5. Association of Attributes — பண்பு சேர்க்கை

Attribute	—	பண்பு
Coefficient of association	—	சேர்க்கைத் துணை அளவு அல்லது சேர்க்கைக் கெழு அளவு
Contingency table	—	இணைப்பட்டியல்
Independence of attributes	—	பண்புகளின் சுயத் தன்மை அல்லது பண்புகளின் சார்பில்லாமை
Order of classes	—	பிரிவுகளின் நிலைகள்
Pair of contrary classes	—	முரண் இணைப் பிரிவுகள்
Second order	—	இரு நிலைப் பிரிவு

6. Analysis of Variance and Design of Experiments
விலக்கப்பாகுபாடும் சோதனைத்திட்டமும்

Analysis of variance	—	விலக்கப் பாகுபாடு
Design of experiment	—	சோதனைத் திட்டம்
Experimental error	—	சோதனைக் குறை
Local control	—	சுயக் கட்டுப்பாடு அல்லது உட் கட்டுப்பாடு

Randomisation — எதேச்சையாக்கல்

Randomised blocks — எதேச்சையாக்கப் பகுதிகள் அல்லது எதேச்சையாக்கப் பிரிவு அல்லது எதேச்சை அளவுப் பகுதி அல்லது எதேச்சை முறைப் பகுதி

Replications — பல முறை அல்லது மீண்டும் மீண்டும் செய்தல்

Treatment — செயல் முறை

Uniformity of trials — சீரான முறைகள் அல்லது ஒரு போக முறைகள்

Variance between — இடையேயுள்ள வேறுபாடு

Variance within — ஊடே உள்ள வேறுபாடு

Variety approach — ரக நிலைப் பகுப்பாய்வு அல்லது வகைநிலைப் பகுப்பாய்வு

7. Time Series — காலத் தொடர் வரிசை

Accidental — எதிர்பாராத அல்லது திடீரென

Business cyclic — வியாபாரச் சுழல்

Centering — நடுவமை

Computed value — கணித்த மதிப்பு

Curve fitting — வளைகோட்டுப் பொருத்து முறை

Cyclic movement — சுழல் மாற்றம்

Depression — மந்தம்

Episode — நிகழ்ச்சி

Free hand curve method — எளிய வளைகோட்டு முறை

Irregular Movement — ஒழுங்கீன மாற்றம்

Method of least square — குறைந்த வர்க்க முறை

Moving average method — நகரும் சராசரி முறை

Multiplication type — பெருக்கல் அமைப்பு முறை

Observed value	—	கண்டறிந்த அளவு
Periodical movement	—	குறிப்பிட்ட கால மாற்றம்
Prosperity	—	செழிப்பு
Recession	—	ஓய்வு
Recovery	—	மீட்சி
Seasonal Index number	—	பருவக் குறியீட்டெண்
Seasonal trend	—	பருவ மாற்றம்
Secular trend	—	சார்பற்ற நேர் போக்கு
Straight line	—	நேர்கோடு
Time series	—	காலத் தொடர் வரிசை
Trend	—	போக்கு
Trend line	—	போக்குக் கோடு

8. Different types of Sample Surveys
பல்வேறு மாதிரி ஆய்வுகள்

Cluster sampling	—	கூட்டு மாதிரி
Line sample	—	வரிசை முறை மாதிரி
Multi-stage sampling	—	பல் நிலை மாதிரி
Stratified sampling	—	பகுத்தாய்வு மாதிரி முறை
Stratum	—	வகுப்பு
Systematic sampling	—	ஒழுங்கு முறை மாதிரி